BULLETIN DE LA S. M. F.

D. BARLET
J. VAROUCHAS

Fonctions holomorphes sur l'espace des cycles

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 3 (1989), p. 327-341
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_3_327_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 327–341.

FONCTIONS HOLOMORPHES SUR L'ESPACE DES CYCLES

PAR

D. BARLET et J. VAROUCHAS (*)

RÉSUMÉ. — Si X est un espace analytique complexe *arbitraire*, il est établi que sur l'espace réduit (variété de Chow) des m-cycles analytiques complexes compacts $c = \sum n_i Y_i$ de X, la fonction $c \mapsto \int_c \xi = \sum n_i \int_{Y_i} \xi$ est holomorphe, pour tout représentant $\bar\partial$-fermé ξ d'un élément de $H^m(X, \Omega_X^m)$.

Ceci, combiné avec les travaux du second auteur, montre que l'espace des cycles d'un espace Kählérien X est toujours Kählérien, et donc que toute image (réduite) par un morphisme propre et plat d'un tel X est également Kählérienne.

ABSTRACT. — If X is an *arbitrary* complex space, it is shown that on the reduced space (Chow variety) of compact complex m-cycles $c = \sum n_i Y_i$ of X, the function $x \mapsto \int_c \xi = \sum n_i \int_{Y_i} \xi$ is holomorphic, for any $\bar\partial$-closed representative ξ of an element of $H^m(X, \Omega_X^m)$. This implies that the space of cycles of a Kähler space X is always a Kähler space, and therefore that any (reduced) image of such a space by a proper flat map is again kähler.

0. Introduction

Le but de cet article est d'établir le

THÉORÈME PRINCIPAL. — *Soient*

- X, S *deux espaces complexes avec* S *réduit,*
- Φ, Ψ *deux familles de supports de* X *avec* Φ *paracompactifiante et* $\Phi \cap \Psi$ *compacte,*
- $\xi \in H_\Phi^m(X, \Omega_X^m)$ *où* Ω_X^m *est le faisceau des* m*-formes holomorphes sur* X*,*
- $\varphi \in \Gamma_\Phi(X, A_X^{m,m})$ *un représentant* $\bar\partial$*-fermé de* ξ *à support dans* Φ*,*
- $(c_s)_{s\in S}$ *une famille analytique de* m*-cycles de* X *à supports dans* Ψ *paramétrée par* S*.*

(*) Texte reçu le 27 juin 1988, révisé le 25 novembre 1988.

D. BARLET, Université de Nancy I, Dépt. de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, France.
J. VAROUCHAS, Université de Nancy I, U.A. du CNRS n° 750, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, France.

Alors la fonction

$$F : s \longmapsto (c_s \cdot \xi) := \int_{c_s} \varphi$$

est holomorphe sur S.

Pour comprendre cet énoncé, il est bon de connaître :

(a) La définition des faisceaux de formes différentielles holomorphes et $\mathcal{C}^\infty$ sur un espace complexe non nécessairement lisse.

(b) La définition des groupes de cohomologie à supports dans une famille paracompactifiante de fermés (f.p.f.) Φ par des cochaînes de Čech ainsi que la forme explicite du morphisme canonique

$$H^s_\Phi(X, \Omega^r_X) \xrightarrow{\gamma^{r,s}} H^{r,s}_{\Phi,\bar\partial}(X) := \frac{\operatorname{Ker}(\bar\partial : \Gamma_\Phi(X, A^{r,s}_X \longrightarrow \Gamma_\Phi(X, A^{r,s+1}_X))}{\operatorname{Im}(\bar\partial : \Gamma_\Phi(X, A^{r,s-1}_X \longrightarrow \Gamma_\Phi(X, A^{r,s}_X))}.$$

(c) La notion de famille analytique de m-cycles (sous-entendu : analytiques complexes) de X à supports dans une famille Ψ de fermés, paramétrée par un espace réduit S. Un m-cycle de X est une combinaison linéaire localement finie à coefficients entiers ≥ 0 de sous-ensembles analytiques irréductibles de dimension m de X. Il est délicat de définir quand une famille de m-cycles dépend analytiquement d'un paramètre $s \in S$.

Notons que le lecteur n'a pas besoin de connaître l'existence de l'espace $B_m(X)$ des m-cycles compacts de X (c'est-à-dire que le foncteur "familles analytiques de m-cycles compacts de X paramétrées par —" est représentables) pour comprendre l'énoncé, et même la démonstration, du théorème principal. Toutefois, si l'on sait que cet espace existe, le théorème principal implique qu'il existe un morphisme canonique de $H^m(X, \Omega^m_X)$ dans $\mathcal{O}(B_m(X))$ donné par l'accouplement

$$(c, \xi) \longmapsto (c \cdot \xi)$$

qu'on appellera aussi intégration de ξ sur le cycle c.

Pour comprendre la portée du théorème, il est également utile de connaître la notion de *fonction faiblement holomorphe* (= continue génériquement holomorphe, donc méromorphe) et d'*espace faiblement normal* (un espace réduit où toute fonction faiblement holomorphe est holomorphe). La principale information de notre énoncé est que la fonction F est non seulement faiblement holomorphe (ce qui est connu depuis longtemps) mais holomorphe.

Pour (a) nous renvoyons le lecteur à [7], [10], ou [15].

Pour (b) nous donnons toutes les explications nécessaires dans le texte et l'Appendice I, où on lève l'ambiguïté de la notion de "support d'une cochaîne de Čech".

Maintenant passons à (c). Il existe plusieurs définitions *équivalentes* de la notion de famille analytique de m-cycles paramétrée par un espace réduit. La première est celle donnée dans [3], [4], [5] et [15]. La seconde, que nous choisissons dans le texte, s'exprime par la possibilité de considérer des traces de formes différentielles holomorphes qui dépendent holomorphiquement des paramètres choisis. Il est établi dans [3, Chapitre VII, Proposition 2] que la première définition implique la seconde. La réciproque est également vraie, mais nous ne nous en servons pas puisque nous déduisons le théorème principal directement de la seconde définition.

L'idée d'accoupler une classe de $H^m(X, \Omega_X^m)$ avec une famille analytique de m-cycles compacts pour obtenir des fonctions holomorphes sur l'espace des paramètres apparaît pour la première fois (à notre connaissance) dans l'article d'ANDREOTTI–NORGUET [2]. Ceci ouvrait la voie à une méthode d'utilisation de la notion de convexité intermédiaire introduite par ANDREOTTI–GRAUERT (où nous conviendrons d'appeler q-convexes (*resp.* q-complets) les espaces appelés $(q+1)$-convexes et $(q+1)$-complets dans [1]) suivant le principe général suivant : la m-convexité d'un espace X permet, sous certaines hypothèses, d'obtenir des conditions de 0-convexité sur l'espace des m-cycles de X. Les auteurs de [2] étudiaient le cas où X est quasi-projectif et considéraient le normalisé faible de l'espace des cycles. En effet, en l'absence de notre théorème principal (*), il n'était pas facile de vérifier que la structure complexe de la variété de Chow (espace des cycles) d'une variété quasi-projective X, lisse ou non, ne dépend pas du choix du plongement de X dans un espace projectif. Le théorème étant établi, nous pouvons, en accouplant les m-cycles avec des classes de cohomologie, obtenir des coordonnées locales au voisinage de tout point de l'espace des m-cycles compacts de X, ceci pour un espace complexe arbitraire ([5, Théorème 2]).

Pour X quasi-projectif, le théorème principal est démontré par le premier auteur dans [3, Chapitre VII]. Plus tard, deux démonstrations étaient données [4] et [5] sous la restriction que X est lisse. Le cas général (X espace complexe arbitraire) n'était toujours pas résolu (voir à ce propos la remarque de [6, p. 381]) au moment de la thèse du second auteur qui consiste à munir d'une métrique Kählérienne l'espace des cycles d'un espace Kählérien. Les résultats établis dans [15, Théorèmes 3 et 4]

(*) Il est instructif de remarquer les passages de [2, Remarque η, p. 52, et Théorème 5, p. 71] où notre résultat peut être utilisé pour éviter de normaliser faiblement la variété de Chow.

sont accompagnés d'hypothèses supplémentaires artificielles dont il était naturel de croire qu'elles étaient superflues. Ayant établi le théorème principal nous obtenons comme conséquence

THÉORÈME 2. — *L'espace des m-cycles compacts d'un espace Kählérien est un espace Kählérien.*

COROLLAIRE (Problème de HIRONAKA, [10, p. 35–36]).
Si $\pi : X \to Y$ est un morphisme propre et plat à fibres de dimension pure avec X Kählérien et Y réduit alors Y est Kählérien.

Pour notre démontration nous utilisons un résultat (lemme de découpage) essentiellement dû à REIFFEN [14]. Du lemme de découpage nous pouvons déduire le

COROLLAIRE. — *Soit $\pi : X \to S$ un morphisme d'espace complexes et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Supposons que* $\dim \pi^{-1}(s) \leq m$ *pour tout $s \in S$. Alors :*

(i) *$R^{q+1}\pi_!\,\mathcal{F} = 0$ pour tout $q \geq m$.*

(ii) *Pour tout recouvrement ouvert $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X on a une surjection de faisceaux sur S*

$$\bigoplus_{\alpha\in A} R^m(\pi_\alpha)_!\,(F|_{X_\alpha}) \longrightarrow R^m\pi_!\,\mathcal{F} \qquad (\textit{où } \pi_\alpha := \pi|_{X_\alpha}).$$

Remarque. — La partie (i) du corollaire est classique quand π est propre, [12].

1. Cohomologie à supports

Nous renvoyons le lecteur à [8] ou [11] pour la définition d'une famille paracompactifiante de fermés (f.p.f.) d'un espace topologique séparé X et des groupes $H^q_\Phi(X,\mathcal{F})$ quand Φ est une f.p.f. de X et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. Voir aussi l'Appendice I.

Nous aurons besoin des propriétés fondamentales suivantes : X sera un espace localement compact complètement paracompact (tout ouvert donc tout sous-espace de X est paracompact), Φ une f.p.f. de X et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. La lettre c désigne la famille des compacts de X. Pour tout espace topologique X', $c \times X'$ désignera la famille des fermés de $X \times X'$ dont la première projection est relativement compacte dans X.