

BULLETIN DE LA S. M. F.

MARIUS VAN DER PUT

MARC REVERSAT

Construction analytique rigide de variétés abéliennes

Bulletin de la S. M. F., tome 117, n° 4 (1989), p. 415-444

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_4_415_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_4_415_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION ANALYTIQUE RIGIDE DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES

PAR

MARIUS VAN DER PUT et MARC REVERSAT (*)

RÉSUMÉ. — Soient R un anneau de valuation (non nécessairement discrète), K son corps des fractions, $0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$ une extension d'un R -schéma abélien A par une tore T sur R déployé et $\Lambda \subset G \otimes_R K$ un sous-groupe libre de rang le rang de T . Si Λ est un réseau de $G \otimes_R K$ (cf. (1.6)), alors $(G \otimes_R K)/\Lambda$ est canoniquement muni d'une structure de groupe analytique propre sur K . La partie principale de ce travail consiste à donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(G \otimes_R K)/\Lambda$ soit une variété abélienne.

ABSTRACT. — Let R be a complete valuation ring (may be not discrete) and K its field of fraction. Let $0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$ be an extension of an abelian R -scheme A by a split R -torus and let $\Lambda \subset G \otimes_R K$ be a free subgroup of rank $= rk(T)$. If Λ satisfies some other natural conditions (we say that Λ is a lattice in $G \otimes_R K$), then $(G \otimes_R K)/\Lambda$ is canonically a proper rigid analytic group over K . The main part of this work is to give necessary and sufficient condition for $(G \otimes_R K)/\Lambda$ to be an abelian variety.

Introduction

Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}^g$, alors le tore analytique $\mathbb{C}^g/\Lambda$ est une variété abélienne si et seulement si il existe une forme hermitienne $H : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$ définie positive telle que $(\text{im } H)(\Lambda \times \Lambda)$ soit inclus dans $\mathbb{Z}$ (cf. [M1, p. 35]).

Cette construction de variétés abéliennes se généralise à la situation où le corps de base K est complet pour une valeur absolue non archimédienne. Plusieurs résultats ont été obtenus, selon au moins deux points de vue :

(1) Soit Λ un réseau multiplicatif du tore algébrique $T = (K^*)^g$. Le tore analytique rigide T/Λ est une variété abélienne si et seulement si il

(*) Texte reçu le 19 septembre 1988, révisé le 12 mai 1989.

M. VAN DER PUT, Mathematisch Instituut, Rijksuniversiteit, Postbus 800, 9700 Av. Groningen, Pays-Bas.

M. REVERSAT, Univ. Paul Sabatier, Mathématiques, Bât. 1R2, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France.

existe un homomorphisme $\varphi : \Lambda \rightarrow X(T)$, où $X(T)$ désigne le groupe des caractères de T , tel que la forme $H : \Lambda \times \Lambda \rightarrow K^*$, $H(\lambda_1, \lambda_2) = \varphi(\lambda_1)(\lambda_2)$, soit symétrique et que la forme $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda \times \Lambda \rightarrow -\log |H(\lambda_1, \lambda_2)| \in \mathbb{R}$ soit définie positive (cf. [G1] et [F-vdP1, p. 198]).

(2) Soit R un anneau noethérien, intègre, complet pour la topologie I -adique, où $I \neq (0)$ est un idéal de R . Soient K le corps des fractions de R , T un tore algébrique déployé sur R de rang g et $\Lambda \subset T(K)$ un sous-groupe libre de rang g . On suppose qu'il existe un homomorphisme $\varphi : \Lambda \rightarrow X(T)$ ($X(T)$ désigne le groupe des caractères de T) tel que la forme $H : \Lambda \times \Lambda \rightarrow K^*$, $H(\lambda_1, \lambda_2) = \varphi(\lambda_1)(\lambda_2)$, soit symétrique et que $H(\lambda, \lambda) \in I$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Dans [M2], D. MUMFORD a construit un schéma en groupes sur R , qu'on notera (abusivement) " T/Λ ", tel que sa fibre générique $(T/\Lambda) \otimes_R K$ soit une variété abélienne.

La construction (2) peut se résumer (en simplifiant) de la manière suivante. On construit à partir du tore algébrique T sur R un schéma formel $\mathcal{C}$ sur R muni d'une action discrète de Λ . Le schéma formel $\mathcal{C}/\Lambda$ est algébrisable et donne le schéma en groupe " T/Λ ". Lorsque R est un anneau de valuation discrète complet, le lien entre (1) et (2) est le suivant : l'espace analytique rigide $\mathcal{C} \otimes_R K$ sur K , associé au schéma formel $\mathcal{C}$ est en fait l'espace analytique rigide T^{an} obtenu par analytification du tore algébrique $T \otimes_R K$ sur K et l'espace analytique $(\mathcal{C}/\Lambda) \otimes_R K$ s'identifie à T^{an}/Λ , le quotient dans la catégorie des espaces analytiques de T^{an} par le sous-groupe discret Λ . On voit que le point de vue (1) est plus restrictif que (2), puisqu'on se limite au cas où R est un anneau de valuation et que l'on ne construit que la fibre générique $(T/\Lambda) \otimes_R K$. Cependant (1) a l'avantage d'être élémentaire, à condition d'admettre quelques propriétés des espaces analytiques, et sa démonstration est proche du cas complexe ; en particulier la construction de l'espace analytique T^{an}/Λ est évidente et il n'y a pas à faire le choix d'un schéma formel $\mathcal{C}$.

La construction suivante généralise (2).

(3) Soient R et K vérifiant les hypothèses de (2). Soit A un schéma abélien sur R et G une extension de A par un tore déployé T sur R . On a donc une suite exacte de schémas en groupes sur R

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Soit $\Lambda \subset G(K)$ un sous-groupe libre de rang le rang de T . C.-L. CHAI ([C, chapitre 2]) et G. FALTINGS ([F]) ont donné un ensemble de conditions portant sur Λ et G permettant de construire un schéma en groupes " G/Λ " sur R , tel que sa fibre générique $(G/\Lambda) \otimes_R K$ soit une variété abélienne sur K .

Le but de notre article est de donner la construction (3), lorsque le corps K est valué complet non-archimédien, en termes d'espaces analytiques rigides, c'est-à-dire à la manière de (1). Nous avons voulu simplifier les conditions sur Λ et G , donner des démonstrations élémentaires, proches de celles de [M1, p. 35], [G1], et [F-vdP1, p. 198]. Signalons que des énoncés et des idées allant dans le sens de ce travail se trouvent depuis longtemps dans [R].

On peut décrire nos résultats principaux de la manière suivante. Soient R un anneau de valuation (non nécessairement discrète) complet, K son corps des fractions, A un schéma abélien sur R , G une extension de A par un tore algébrique T sur R (on a donc une suite exacte $0 \rightarrow T \rightarrow G \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0$), $X(T)$ le groupe de caractères de T , $\tau : X(T) \rightarrow \text{Pic}^0(A)(R)$ l'homomorphisme de groupes associé à G et Λ un sous-groupe de $G(K)$. On a $A(K) = A(R)$, d'où (la dernière flèche provient de $-\log |\cdot|$).

$$\begin{aligned} \ell : G(K) &\longrightarrow \frac{G(K)}{G(R)} \xrightarrow{\sim} \frac{T(K)}{T(R)} \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X(T), K^*/R^*) \longrightarrow \text{Hom}(X(T), \mathbb{R}). \end{aligned}$$

On dit que le sous-groupe Λ de $G(K)$ est un réseau si ℓ est injectif sur Λ et si $\ell(\Lambda)$ est un réseau de $\text{Hom}(X(T), \mathbb{R})$. Si Λ est un réseau de $G(K)$, $(G \otimes_R K)/\Lambda$ est canoniquement muni d'une structure de groupe analytique propre sur K (cf. (1.6.3)). Le THÉORÈME (2.1) affirme que $(G \otimes_R K)/\Lambda$ est une variété abélienne si et seulement si il existe φ et D possédant les propriétés suivantes :

(i) $\varphi : \Lambda \rightarrow X(T)$ est un homomorphisme de groupe tel que la forme sur $\Lambda \times \Lambda$, $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \ell(\lambda_1)(\varphi(\lambda_2))$, soit symétrique définie et positive ;

(ii) D est un diviseur ample sur A tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ on ait $\tau(\varphi(\lambda)) = [\pi(\lambda)^*D - D] \in \text{Pic}^0(A)$;

(iii) pour tout $\lambda \in \Lambda$ soit $h(\lambda)$ la fonction rationnelle sur G qui est déterminée à une constante multiplicative près par les deux conditions suivantes :

• le diviseur de $h(\lambda)$ est $\lambda^*\pi^*D - \pi^*D$;

• $h(\lambda)(tg) = \varphi(\lambda)(t) \cdot h(\lambda)(g)$ pour tout $t \in T$ et $g \in G$;

alors, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ et tout $g \in G$

$$h(\lambda_1)(\lambda_2 g) \cdot [h(\lambda_1)(g)]^{-1} = h(\lambda_2)(\lambda_1 g) \cdot [h(\lambda_2)(g)]^{-1}.$$

Il apparaît clairement à la suite de notre énoncé que la variété abélienne $(G \otimes_R K)/\Lambda$ ne dépend pas des choix de φ et D ainsi que du choix des

nombreux isomorphismes de faisceaux inversibles figurant dans [C] et [F] puisque nous les avons supprimés.

On peut formuler d'autres versions des assertions (i), (ii) et (iii), par exemple : $(G \otimes_R K)/\Lambda$ est une variété abélienne si et seulement si il existe un diviseur D sur A tel que :

(iv) D est ample et $\pi(\Lambda) \cap \text{Support}(D) = \emptyset$;

(v) pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe une fonction $h(\lambda)$ rationnelle sur G , de diviseur $\lambda^{-1}\pi^*D - \pi^*D$, telle que $h(\lambda)(1) = 1$;

(vi) la forme $H : \Lambda \times \Lambda \rightarrow K^*$, $H(\lambda_1, \lambda_2) = h(\lambda_1)(\lambda_2)$ est bilinéaire et symétrique. Composée avec $-\log|\cdot|$, elle donne une forme définie positive.

Les outils analytiques utilisés dans la démonstration de notre théorème principal (THÉORÈME (2.1)) figurent essentiellement dans les paragraphes (1.4) — quelques résultats sur le groupe de Picard d'un espace analytique — et (1.7) — une décomposition de l'espace $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$ suivant le groupe des caractères $X(T)$ de T . Notre méthode nous permet également d'obtenir diverses autres propriétés de G/Λ ou de A (paragraphe 3), ou encore de donner une démonstration d'un résultat, inverse du problème précédent, énoncé par M. RAYNAUD ([R, théorème 2]) selon lequel si $(G \otimes_R K)/\Lambda$ est une variété abélienne et si $A \otimes_R K$ est un groupe analytique propre (une variété abéloïde) avec bonne réduction, alors $A \otimes_R K$ est une variété abélienne (THÉORÈME (3.5)).

Dans la suite de cet article, les lettres A , G , T changent de sens, elles désignent les objets précédents *définis sur K* . Pour les notions fondamentales de géométrie analytique rigide, nous renvoyons à [B–G–R], [G–vdP] et [F–vdP1].

1. Analyse rigide sur une extension d'une variété abélienne par un tore

(1.1) Notations. — Soient K un corps quelconque, A/K une variété abélienne, $\text{Pic}^0(A) = \text{Pic}^0(A)(K)$ le groupe des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur A tels que :

(i) $\mathcal{L}$ est défini sur K ;

(ii) $a^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}$ pour tout point a de A .

Soient T/K un tore algébrique déployé, $X(T)$ son groupe de caractères et $\tau : X(T) \rightarrow \text{Pic}^0(A)$ un homomorphisme de groupes.

A l'homomorphisme τ on associe une extension de A par T . C'est une suite exacte de groupes algébriques commutatifs :

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$