

BULLETIN DE LA S. M. F.

PATRICE LE CALVEZ

Propriétés générales des applications déviant la verticale

Bulletin de la S. M. F., tome 117, n° 1 (1989), p. 69-102

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_1_69_0

© Bulletin de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES APPLICATIONS DÉVIANT LA VERTICALE

PAR

PATRICE LE CALVEZ (*)

RÉSUMÉ. — Nous étudions les difféomorphismes de l'anneau qui dévient la verticale (et dont c'est la seule propriété). Nous donnons d'abord des résultats du même type que ceux démontrés par Birkhoff sur les ouverts annulaires invariants, en particulier nous montrons qu'il existe généralement un ensemble d'Aubry–Mather sur la frontière de ceux-ci. Comme applications nous obtenons d'abord des conditions suffisantes d'existence d'un intervalle de nombres de rotation, nous démontrons ensuite le résultat suivant : si l'on perturbe un difféomorphisme déviant la verticale, préservant l'aire et admettant une région d'instabilité, on conserve un intervalle de nombres de rotation.

ABSTRACT. — We study twist maps of the annulus without any other property, such as being area-preserving or dissipative, and especially the Aubry–Mather sets and their rotation numbers. We first give results about infinite annular open sets invariant by a twist map, and show how to get an Aubry–Mather set on their boundary. Applying these results, we give, in a first part, sufficient conditions to get an interval of rotation numbers; and we show, in a second part, that if we perturb an area-preserving twist map which has a region of instability, we still have a large interval of rotation numbers.

On s'intéresse, dans ce qui suit, à la dynamique des difféomorphismes de l'anneau qui dévient la verticale mais qui n'ont pas d'autre propriété, comme celle, par exemple, de préserver ou de diminuer les aires. On s'intéresse plus particulièrement aux ensembles d'Aubry–Mather de ces applications et à leurs nombres de rotation.

Le premier paragraphe est consacré à des notations et à des rappels. On redonne notamment la définition et les propriétés des ensembles d'Aubry–Mather d'une application déviant la verticale et on rappelle des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'ensembles d'Aubry–Mather de nombre de rotation rationnel fixé.

Dans le second paragraphe on montre des résultats sur les ouverts annulaires, non nécessairement bornés, invariants par une application

(*) Texte reçu le 18 septembre 1987, révisé le 10 octobre 1988.

P. LE CALVEZ, Université Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

déviante la verticale, résultats du même type que ceux de la théorie de Birkhoff, dans le cas de préservation des aires. Ainsi obtient-on, non plus des graphes continus invariants comme dans ce dernier cas, mais des ensembles d'Aubry-Mather.

On utilise ces résultats dans le troisième paragraphe pour faire apparaître des ensembles analogues aux attracteurs de Birkhoff, définis dans le cas dissipatif, et en déduire alors des résultats du même type sur les nombres de rotation. Ainsi peut-on démontrer, ou redémontrer, l'existence d'un intervalle de rotation dès que l'on a un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation irrationnel hyperbolique, une orbite périodique non ordonnée, ou certaines intersections homoclines.

Finalement, dans le dernier paragraphe, on généralise un résultat déjà montré dans le cas dissipatif et obtenu alors grâce aux propriétés des attracteurs de Birkhoff; on montre que si l'on perturbe légèrement une application déviante la verticale, préservant les aires, et possédant une région d'instabilité, on a encore un grand nombre d'ensembles d'Aubry-Mather.

Il est à noter que l'on n'utilise ici que des méthodes topologiques.

1. Définitions, rappels

Notations. — On considère le tore $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ muni de sa structure de variété orientée habituelle, le revêtement universel $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de \mathbb{A} , et les applications :

$$\pi : \tilde{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathbb{A}, (\tilde{\theta}, r) \longmapsto (\tilde{\theta} + \mathbb{Z}, r) \quad \text{et} \quad \tilde{T} : \tilde{\mathbb{A}} \longrightarrow \tilde{\mathbb{A}}, (\tilde{\theta}, r) \longmapsto (\tilde{\theta} + 1, r).$$

On considère ensuite la sphère

$$S^2 = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 = 1 \right\};$$

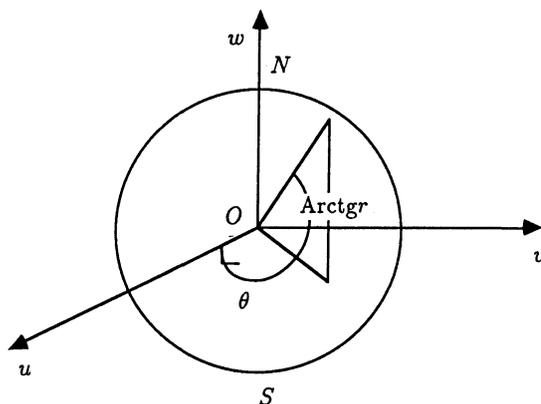
le plongement Φ de \mathbb{A} dans S^2 , défini pour tout (θ, r) appartenant à \mathbb{A} , par la relation :

$$\Phi((\theta, r)) = \left(\frac{\cos 2\pi\theta}{\sqrt{(1+r^2)}}, \frac{\sin 2\pi\theta}{\sqrt{(1+r^2)}}, \frac{1}{\sqrt{(1+r^2)}} \right),$$

et les points $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$.

On définit les projections :

$$\begin{aligned} p_1 : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{T}^1, (\theta, r) \longmapsto \theta \quad \text{et} \quad p_2 : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}, (\theta, r) \longmapsto r; \\ \tilde{p}_1 : \tilde{\mathbb{A}} &\longrightarrow \mathbb{R}, (\tilde{\theta}, r) \longmapsto \tilde{\theta} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2 : \tilde{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathbb{R}, (\tilde{\theta}, r) \longmapsto r. \end{aligned}$$



On considère pour tout point $x = (\theta, r)$ de \mathbf{A} (resp. $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r)$ de $\tilde{\mathbf{A}}$) les ensembles :

$$D(x) = \{\theta\} \times \mathbb{R} \quad (\text{resp. } D(\tilde{x}) = \{\tilde{\theta}\} \times \mathbb{R}),$$

$$D_S(x) = \{\theta\} \times]-\infty, r] \quad (\text{resp. } D_S(\tilde{x}) = \{\tilde{\theta}\} \times]-\infty, r]),$$

$$D_N(x) = \{\theta\} \times [r, +\infty[\quad (\text{resp. } D_N(\tilde{x}) = \{\tilde{\theta}\} \times [r, +\infty[).$$

On dira qu'un ensemble compact X de \mathbf{A} sépare \mathbf{A} , si et seulement si $\mathbf{A} \setminus X$ admet deux composantes connexes non bornées. Si M est un réel suffisamment grand, l'une d'entre elles contient $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, -M]$, on la note $U(X)$, l'autre contient $\mathbb{T}^1 \times [M, +\infty[$, on la note $V(X)$.

On écrira pour toutes parties X et Y d'un espace topologique E , respectivement $\text{Ad}(X)$, $\text{Int}(X)$, $\text{Fr}(X)$, $X \setminus Y$ pour l'adhérence, l'intérieur, la frontière de X , et pour l'ensemble des points de X qui ne sont pas dans Y .

On dit qu'un difféomorphisme f de \mathbf{A} , de classe C^1 , homotope à l'identité, dévie la verticale à droite si, un relèvement \tilde{f} de f à $\tilde{\mathbf{A}}$ étant choisi, on a les relations suivantes :

i) pour tout \tilde{x} appartenant à $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\partial/\partial r \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}) > 0,$$

ii) pour tout $\tilde{\theta}$ appartenant à \mathbb{R}

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}((\tilde{\theta}, r)) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{p}_2 \circ \tilde{f}((\tilde{\theta}, r)) = +\infty,$$

iii) pour tout $\tilde{\theta}$ appartenant à \mathbb{R}

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}((\tilde{\theta}, r)) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \tilde{p}_2 \circ \tilde{f}((\tilde{\theta}, r)) = -\infty.$$

On notera \mathcal{K} l'ensemble des difféomorphismes de classe C^1 de \mathbf{A} homotopes à l'identité, qui dévient la verticale à droite, et $\tilde{\mathcal{K}}$ l'ensemble

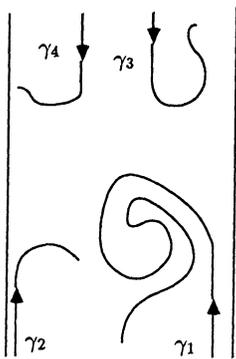
des difféomorphismes de $\tilde{\mathbb{A}}$ qui relèvent un élément de \mathcal{K} . Chacun de ces ensembles sera muni de la topologie compacte-ouverte. Puisque tout élément f de \mathcal{K} est un difféomorphisme de \mathbb{A} homotope à l'identité, il existe un unique homéomorphisme de S^2 qui coïncide avec $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ sur $S^2 \setminus \{N, S\}$; celui-ci, noté \hat{f} , laisse fixes les points N et S . De plus si f appartient à \mathcal{K} et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{K} convergeant vers f , alors la suite $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers \hat{f} .

Rappels sur les chemins positifs et négatifs. — Une notion importante dans l'étude des applications déviant la verticale est celle de chemin positif et négatif. Ceux-ci ont été définis dans l'étude des régions d'instabilité, ils étaient alors issus d'un bord de cette région (voir HERMAN [He], LE CALVEZ [L2]). Dans l'étude qui nous concerne, on s'intéresse à l'anneau \mathbb{A} tout entier et non pas à une région d'instabilité, on va ainsi définir ce que l'on appelle des chemins positifs et négatifs issus de l'infini.

Définition. — Un *chemin positif* issu de S (resp. N) est un plongement $\gamma :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{A}$ de classe C^1 , vérifiant les propriétés suivantes :

i) il existe τ appartenant à $] - \infty, 0]$ tel que, pour tout t inférieur à τ , on ait $\gamma'(t) = v$ (resp. $\gamma'(t) = -v$), où v est le vecteur vertical $(0, 1)$,

ii) le relèvement à \mathbb{R} de l'angle que fait v (resp. $-v$) avec $\gamma'(t)$ qui est nul en τ est strictement positif, pour t strictement supérieur à τ .



Exemple de deux chemins positifs γ_1 et γ_3 , issus respectivement de S et de N et de deux chemins négatifs γ_2 et γ_4 , issus respectivement de S et de N .

Par analogie avec les chemins positifs et négatifs issus du bord d'une région d'instabilité, on a, par la même démonstration, le résultat suivant (voir HERMAN [He]) :