BULLETIN DE LA S. M. F.

DAMIEN ROY

Sur une version algébrique de la notion de sous-groupe minimal relatif de $\mathbb{R}^n$

Bulletin de la S. M. F., tome 118, nº 2 (1990), p. 171-191

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_2_171_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 171–191.

SUR UNE VERSION ALGÉBRIQUE DE LA NOTION DE SOUS-GROUPE MINIMAL RELATIF DE $\mathbf{R}^n$

PAR

DAMIEN ROY (*)

RÉSUMÉ. — Nous introduisons, pour des corps $k \subset K$, la notion algébrique de k-sous-espace minimal relatif de K^n, et celle, duale, de k-sous-espace étoilé relatif de K^n. La première traduit, pour $k = \mathbb{Q}$ et $K = \mathbb{R}$, la notion topologique de sous-groupe minimal relatif de $\mathbb{R}^n$ rappelée dans l'introduction. Nous établissons certaines propriétés des k-sous-espaces étoilés relatifs de K^n, et, par dualité, nous en déduisons des propriétés correspondantes pour les k-sous-espaces minimaux relatifs de K^n.

ABSTRACT. — We introduce, for fields $k \subset K$, the algebraic notion of a relative minimal k-subspace of K^n, and the dual notion of a relative star-like k-subspace of K^n. The first one traduces, for $k = \mathbb{Q}$ and $K = \mathbb{R}$, the topological notion of a relative minimal subgroup of $\mathbb{R}^n$ recalled in the introduction. We obtain properties of relative star-like k-subspaces of K^n, from which, by duality, we deduce corresponding properties for relative minimal k-subspaces of K^n.

Introduction

Soient H, G des sous-groupes de $\mathbb{R}^n$ avec $H \subset G$. Dans [3], § 1, on introduit les définitions suivantes. On dit que G est un sous-groupe *minimal* de $\mathbb{R}^n$ *relativement à* H si G est de type fini, dense dans $\mathbb{R}^n$, et si aucun sous-groupe de G contenant H, de rang inférieur au rang de G, n'est dense dans $\mathbb{R}^n$. On dit aussi que G est un sous-groupe *minimal* de $\mathbb{R}^n$ s'il est minimal relativement à 0. On dit que G est un sous-groupe *étoilé* de $\mathbb{R}^n$ *relativement à* H si G est de type fini, dense dans $\mathbb{R}^n$, et si $G \cap \langle u\rangle_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\langle u\rangle_{\mathbb{R}}$ pour tout $u \in H$, où $\langle u\rangle_{\mathbb{R}}$ désigne le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par u. Enfin, on dit que G est un sous-groupe *étoilé* de $\mathbb{R}^n$ s'il est étoilé relativement à lui-même.

Soient k un corps, et K une extension de k. Dans cet article, on définit les notions analogues de k-sous-espace minimal relatif de K^n, de

(*) Texte reçu le 28 juin 1989, révisé le 30 août 1990.
D. ROY, Institut Henri-Poincaré, Problèmes diophantiens, 11, rue Pierre-et-Marie-Curie, 75231 Paris Cedex 05, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1990/171/$ 5.00

k-sous-espace étoilé relatif de K^n, de k-sous-espace minimal de K^n, et de k-sous-espace étoilé de K^n. Le cas important est celui où $k = \mathbb{Q}$ et $K = \mathbb{R}$. En effet, désignons par $\langle H \rangle_{\mathbb{Q}}$ et $\langle G \rangle_{\mathbb{Q}}$ les $\mathbb{Q}$-sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ engendrés respectivement par H et G. Les nouvelles définitions sont données de telle sorte que G soit un sous-groupe minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$ relativement à H si et seulement si $\langle G \rangle_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-espace minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$ relativement à $\langle H \rangle_{\mathbb{Q}}$. Il s'ensuit que G est un sous-groupe minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\langle G \rangle_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-espace minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$.

Dans le nouveau contexte, des conditions algébriques sont substituées aux conditions topologiques. Pour ce faire, on transpose la notion de sous-groupe dense de $\mathbb{R}^n$, grâce à la caractérisation qu'en donne [1], § 1, n° 3. On obtient ainsi la notion de k-sous-espace de type (D) de K^n, sur laquelle se fondent les autres notions.

Le but de ce travail est d'établir certaines propriétés des k-sous-espaces minimaux relatifs et étoilés relatifs de K^n. Ces propriétés se traduisent immédiatement en des propriétés analogues des sous-groupes minimaux relatifs et étoilés relatifs de $\mathbb{R}^n$. On démontre ainsi les propositions énoncées sans démonstration au § 1 de [3]. Par ailleurs, cet article ne s'appuie pas sur [3]. Cependant, on trouvera dans [3] des questions qui motivent l'étude des sous-groupes minimaux relatifs de $\mathbb{R}^n$.

Le § 1 de cet article regroupe les définitions. Au § 2, on montre qu'il y a dualité entre les notions de k-sous-espace minimal relatif et de k-sous-espace étoilé relatif. Ainsi l'étude de la première se ramène à celle de la seconde. Pour la suite, on est amené à supposer que le corps k est parfait, de cardinalité infinie. Au § 3, on montre que la dimension d'un k-sous-espace étoilé de K^n est $\geq 2n$. On donne, pour $n \geq 2$, une caractérisation des k-sous-espaces étoilés de K^n, et des k-sous-espaces de K^n étoilés relativement à un k-sous-espace de codimension 1. La première fait voir qu'à chaque k-sous-espace étoilé de K^n répond une extension algébrique de k, contenue dans K, distincte de k. Au § 4, on en déduit que la dimension d'un k-sous-espace minimal de K^n est $\leq 2n$, et qu'elle est égale à $n + 1$ si k est algébriquement clos dans K. On obtient aussi une description des k-sous-espaces minimaux de K^n de dimension $n+1$, $2n-1$ et $2n$. Ainsi, on montre que, pour $n \geq 2$, un k-sous-espace E de K^n de dimension $2n$ est minimal si et seulement s'il existe une extension quadratique F de k contenue dans K, et une base de K^n sur K, tels que E soit le F-sous-espace de K^n engendré par cette base. Enfin, on donne, pour $n \geq 2$, une caractérisation des k-sous-espaces de K^n de dimension $\geq n+2$, minimaux relativement à un k-sous-espace de dimension 1. On conclut par un critère de minimalité.

La poursuite de cette recherche, commencée au doctorat avec le support d'une bourse doctorale du FCAR (Québec), a été rendue possible grâce au soutien d'une bourse en sciences de l'OTAN du CRSNG (Canada). Elle a été accomplie au cours d'un stage au sein de l'équipe "Problèmes diophantiens" de l'université Paris VI, que je remercie de son accueil chaleureux.

Notations

Soit F un corps quelconque. Pour chaque entier $n \geq 0$, on munit le F-espace vectoriel F^n de sa forme bilinéaire standard, notée $(\ ,\ )_n$. Par suite, la *transposée* d'une application F-linéaire $f\colon F^m \to F^n$ est définie comme l'application F-linéaire ${}^t\!f\colon F^n \to F^m$ vérifiant $(x, {}^t\!f(y))_m = (f(x), y)_n$ pour tout $x \in F^m$ et $y \in F^n$. Si U est un F-sous-espace de F^n, on note $U^\perp$ le F-sous-espace de F^n orthogonal à U. On dit que deux sous-espaces de F^n sont *supplémentaires orthogonaux* si l'un est l'orthogonal de l'autre par rapport à $(\ ,\ )_n$. Si V est un F-espace vectoriel, et S un sous-ensemble de V, on note $\langle S\rangle_F$ le F-sous-espace de V engendré par S.

Dans la suite, on fixe le choix d'un corps k et d'une extension K de k. Si $f\colon k^m \to k^n$ est une application k-linéaire, on note f_K l'unique application K-linéaire de K^m dans K^n qui coïncide avec f sur k^m. Alors on a ${}^t(f_K) = ({}^t\!f)_K$. Si $m = n$ et si f est un isomorphisme, alors ${}^t\!f$ et f_K en sont aussi. On a $({}^t\!f)^{-1} = {}^t(f^{-1})$ et $(f_K)^{-1} = (f^{-1})_K$. Ainsi, pour un automorphisme f de k^n, les trois opérations : passage à l'inverse, passage à la transposée, et passage de f à f_K, commutent entre elles, et l'expression ${}^t\!f_K^{-1}$ n'est pas ambiguë. Les lettres $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ désignent les corps usuels.

1. Définitions

Soient n, n_1, n_2 des entiers positifs. On introduit d'abord trois définitions :

Définition. — Soit E un k-sous-espace de K^n. On définit le k-sous-espace de K^n associé à E par

$$E_{\mathrm{ass}/k} = \{x \in K^n \ ; \ (x, E)_n \subset k\}.$$

On dit que E est un k-sous-espace de *type* (D) de K^n si $E_{\mathrm{ass}/k} = 0$.

Définition. — On dit qu'un k-sous-espace E de K^n est *minimal relativement à un k-sous-espace $B \subset E$*, s'il est de dimension finie, de type (D), et ne contient aucun k-sous-espace de type (D) de K^n, contenant B, de dimension inférieure. On dit qu'il est *minimal*, s'il est minimal relativement à 0.

Définition. — On dit qu'un k-sous-espace E de K^n est *étoilé relativement à un k-sous-espace $B \subset E$*, s'il est de dimension finie, de type (D), et si la dimension de $E \cap \langle u \rangle_K$ sur k est ≥ 2 pour tout $u \in B$ non nul. On dit qu'il est *étoilé* s'il est étoilé relativement à lui-même.

Soient H, G des sous-groupes de type fini de $\mathbb{R}^n$, avec $H \subset G$. On pose $B = \langle H \rangle_{\mathbb{Q}}$ et $E = \langle G \rangle_{\mathbb{Q}}$. D'après [1], § 1, n° 3, le groupe G est dense dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si son sous-groupe associé

$$G_{\text{ass}} = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ (x, G)_n \subset \mathbb{Z}\}$$

est réduit à $\{0\}$. On a $E_{\text{ass}/\mathbb{Q}} = \langle G_{\text{ass}} \rangle_{\mathbb{Q}}$. On en déduit que G est dense dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si E est un $\mathbb{Q}$-sous-espace de type (D) de $\mathbb{R}^n$. En appliquant ce résultat à l'ensemble des sous-groupes de G contenant H, on obtient que G est un sous-groupe minimal de $\mathbb{R}^n$ relativement à H si et seulement si E est un $\mathbb{Q}$-sous-espace minimal de $\mathbb{R}^n$ relativement à B. D'autre part, pour $u \in \mathbb{R}^n$, avec $u \neq 0$, le groupe $G \cap \langle u \rangle_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\langle u \rangle_{\mathbb{R}}$ si et seulement si $E \cap \langle u \rangle_{\mathbb{R}}$ est de dimension ≥ 2 sur $\mathbb{Q}$. On en déduit que G est un sous-groupe étoilé de $\mathbb{R}^n$ relativement à H si et seulement si E est un $\mathbb{Q}$-sous-espace étoilé de $\mathbb{R}^n$ relativement à B. En particulier, G est un sous-groupe minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si E est un $\mathbb{Q}$-sous-espace minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$. Enfin, H est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si B est engendré par des éléments de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ ([1], § 1, n° 1).

Ces remarques permettent de transcrire, en termes de sous-groupes de $\mathbb{R}^n$, les résultats qui seront énoncés par la suite en termes de k-sous-espaces de K^n. De telles transcriptions sont données dans [3], § 1. Les informations qu'elles livrent sur les sous-groupes minimaux relatifs de $\mathbb{R}^n$ sont employées dans [3] à l'étude des sous-groupes minimaux des groupes de Lie commutatifs réels, la composante neutre d'un tel groupe de Lie étant isomorphe, pour un entier $n \geq 0$, au quotient de $\mathbb{R}^n$ par un sous-groupe discret.

On introduit maintenant une relation d'équivalence sur l'ensemble des k-sous-espaces de dimension finie de K^n, et sur l'ensemble des couples (B, E) de k-sous-espaces de dimension finie de K^n, avec $B \subset E$. On introduit aussi une notion de dualité.

Définition. — Soient E_1, E_2 des k-sous-espaces de K^n de dimension finie. On dit qu'ils sont *équivalents* s'il existe un automorphisme de K^n qui applique E_1 sur E_2.