SLAÏM BEN FARAH
LOTFI KAMOUN

Distributions coniques sur le cône des matrices de rang un et de trace nulle

Bulletin de la S. M. F., tome 118, nº 3 (1990), p. 251-272
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_3_251_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 251–272.

DISTRIBUTIONS CONIQUES SUR LE CÔNE DES MATRICES DE RANG UN ET DE TRACE NULLE

DE

SLAÏM BEN FARAH et LOTFI KAMOUN (*)

RÉSUMÉ. — Nous caractérisons les fonctions moyennes sur le cône $\Xi = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \mathrm{rg}(\xi) = 1 \text{ et } \mathrm{tr}(\xi) = 0\}$ ($n \geq 3$) qui s'identifie à l'espace homogène $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})/MN$ où MN est un sous-groupe fermé de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$. Ce qui nous a permis, dans le cas $n = 3$, de déterminer toutes les distributions coniques sur Ξ.

ABSTRACT. — We characterize the orbital functions on the cone $\Xi = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \mathrm{rg}(\xi) = 1 \text{ and } \mathrm{tr}(\xi) = 0\}$ ($n \geq 3$) which identifies with the homogeneous space $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})/MN$ where MN is a closed subgroup of $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$. This permits us, in the case $n = 3$, to determine all the conical distributions on Ξ.

Introduction

Les distributions coniques ont été introduites par S. HELGASON [6] qui les a définies sur l'espace des horocycles d'un espace symétrique riemannien et les a déterminées dans le cas du groupe de Lorentz $\mathrm{SO}_0(1, q)$. MEN CHANG HU [7] en donne une description dans le cas où l'espace symétrique riemannien est de rang un. Également dans le cas de $\mathrm{SO}_0(1, q)$, les distributions coniques ont été étudiées par K. HARZALLAH [5] et A. STRASBURGER [12].

J. FARAUT et K. HARZALLAH [2] ont défini et déterminé les distributions coniques dans le cas de l'espace symétrique pseudo-riemannien isotrope de rang un $\mathrm{O}(p, q)/\mathrm{O}(p-1, q)$. Ce sont des distributions définies sur le cône isotrope de la forme quadratique associée au groupe $\mathrm{O}(p, q)$.

Dans cet article, dont les résultats ont été annoncés dans [1] et [8], on considère le cône Ξ des matrices carrées réelles, d'ordre $n \geq 3$, de rang un et de trace nulle. Ξ est un espace homogène associé à l'espace symétrique pseudo-riemannien non isotrope de rang un $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{GL}(n-1, \mathbb{R})$. On

(*) Texte reçu le 11 janvier 1990, révisé le 12 juin 1990.
S.B. FARAH, L. KAMOUN, Université du Centre, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, 5019 Monastir, Tunisie

définit les distributions coniques sur Ξ d'une façon analogue à [2]. Dans le cas où $n = 3$ nous donnons une description complète de ces distributions.

1. Le cône Ξ des matrices de rang un et de trace nulle

Pour tout entier $n \geq 3$, on considère le groupe de Lie semi-simple connexe, $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ et le cône

$$\Xi = \Big\{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rg}(\xi) = 1 \text{ et } \mathrm{tr}(\xi) = 0\Big\},$$

où d'une façon générale $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices réelles à k lignes et k colonnes. G opère transitivement sur Ξ par conjugaison $g \cdot \xi = g\xi g^{-1}$. Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On définit un automorphisme involutif $\sigma : \mathrm{G} \to G$ par $\sigma(g) = JgJ$. Le sous-groupe des points fixes de σ est :

$$H = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & p & b \\ {}^tq & h & {}^tq \\ b & p & a \end{pmatrix} \text{ tel que } \det(g) = 1,\ h \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R}),\ p, q \in \mathbb{R}^{n-2} \text{ et } a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

où d'une façon générale ${}^tA$ est la transposée de la matrice A, un élément de $\mathbb{R}^k$ étant considéré comme une matrice ligne. H est isomorphe à $\mathrm{S}(\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{R}))$.

La différentielle de σ, notée encore σ, est l'automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ défini par $\sigma(X) = JXJ$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition symétrique de $\mathfrak{g}$ définie par σ. Soient

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{q} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} = \mathbb{R} \cdot L.$$

$\mathfrak{A}$ est un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \sigma)$. Soit μ la forme linéaire sur $\mathfrak{A}$ définie par $\mu(\lambda L) = \lambda$ pour tout λ dans $\mathbb{R}$. Les sous-espaces propres de ad L associés respectivement à ± 1 et ± 2 sont

$$\mathfrak{g}^{\mu} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & {}^t q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } p, q \in \mathbb{R}^{n-2} \right\},$$

$$\mathfrak{g}^{2\mu} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{g}^{-\mu} = \sigma(\mathfrak{g}^{\mu}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}^{-2\mu} = \sigma(\mathfrak{g}^{2\mu}).$$

Posons $\mathfrak{N} = \mathfrak{g}^{\mu} \oplus \mathfrak{g}^{2\mu}$ et $\bar{\mathfrak{N}} = \sigma(\mathfrak{n}) = \mathfrak{g}^{-\mu} \oplus \mathfrak{g}^{-2\mu}$. Ce sont des sous-algèbres de Lie nilpotentes de $\mathfrak{g}$.

Soient A, N et $\overline{N}$ les sous-groupes de Lie connexes de G correspondant respectivement aux sous-algèbres de Lie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ et $\bar{\mathfrak{N}}$. Alors,

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \exp t & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-t) \end{pmatrix} \text{ où } t \in \mathbb{R} \right\}, \text{ avec } a_t \cdot a_s = a_{t+s} ;$$

$$N = \left\{ n(\alpha, p, q) = \begin{pmatrix} 1 & p & \alpha + \frac{1}{2} p \cdot q \\ 0 & I_{n-2} & {}^t q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } p, q \in \mathbb{R}^{n-2} \right\},$$

avec $n(\alpha,p,q)n(\alpha',p',q') = n(\alpha + \alpha' + \frac{1}{2}(p \cdot q' - p' \cdot q), p + p', q + q')$;

$$\overline{N} = \left\{ \bar{n}(\alpha, p, q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^t q & I_{n-2} & 0 \\ \alpha + \frac{1}{2} p \cdot q & p & 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } p, q \in \mathbb{R}^{n-2} \right\}$$

avec

$$\bar{n}(\alpha,p,q)\bar{n}(\alpha',p',q') = \bar{n}(\alpha + \alpha' + \tfrac{1}{2}(p \cdot q' - p' \cdot q), p + p', q + q') ;$$

$$p \cdot q = \sum_{j=1}^{n-2} p_j q_j .$$

Le centraliseur de $\mathfrak{A}$ dans H est le sous-groupe de G,

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{tel que } \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } h \in \mathrm{GL}(n-2, \mathbb{R}), \text{ avec } \lambda^2 \det(h) = 1 \right\}.$$

M normalise N et MN est le stabilisateur du point $\xi^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pour l'action de G dans Ξ.

Le cône Ξ s'identifie alors à l'espace homogène G/MN. MN est unimodulaire donc Ξ possède une mesure G-invariante qu'on notera $\mathrm{d}\xi$.

Soit $\xi \in \Xi$, alors il existe $a = (a_1, A, a_n)$ et $b = (b_1, B, b_n)$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, A et B sont dans $\mathbb{R}^{n-2}$, tels que $\xi = {}^t ab$ et $a \cdot b = 0$. a et b ne sont pas déterminés de façon unique, mais si $\xi = {}^t ab = {}^t a'b'$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $a' = \lambda a$ et $b' = (1/\lambda)b$.

Soit u l'application de Ξ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(\xi) = \operatorname{tr} \xi\xi^0$, u est MN-invariante et C^∞.

Proposition 1.1. — *Les orbites du groupe MN dans Ξ sont :*

$$\begin{aligned}
&\{\lambda\xi^0\} \textit{ où } \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \Xi_t = \big\{\xi \in \Xi \textit{ tel que } u(\xi) = t\big\} \textit{ où } t \in \mathbb{R}^*, \\
&\quad \Omega_1 = \big\{\xi \in \Xi \textit{ tel que } e_n\xi = 0 \text{ et } \xi^t e_1 \neq 0\big\}, \\
&\quad \Omega_2 = \big\{\xi \in \Xi \textit{ tel que } e_n\xi \neq 0 \text{ et } \xi^t e_1 = 0\big\}, \\
&\quad \Gamma_1 = \big\{\xi = {}^t ab \in \Xi_{00} \textit{ tel que } A \neq 0 \text{ et } B = 0\big\}, \\
&\quad \Gamma_2 = \big\{\xi = {}^t ab \in \Xi_{00} \textit{ tel que } A = 0 \text{ et } B \neq 0\big\},
\end{aligned}$$

et si $n \geq 4$ on a en plus, $\Gamma = \big\{\xi = {}^t ab \in \Xi_{00}$ tel que $A \neq 0$ et *$B \neq 0\big\}$ qui est une orbite lorsque $n > 4$ et réunion de deux orbites lorsque $n = 4$, où $\Xi_{00} = \{\xi \in \Xi$ tel que $e_n\xi = 0$ et $\xi^t e_1 = 0\}$ et $\{e_i\,;\ 1 \leq i \leq n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.* $\square$

L'ouvert $\Xi^* = \bigcup_{t\neq 0} \Xi_t$ est dense dans Ξ. L'ouvert des points réguliers de u est $\Xi' = \Xi^* \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ et l'ensemble des points critiques de u est $\Xi_{00} = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \mathbb{R}^* \cdot \xi^0$.

Soit $\xi^* = {}^t\xi^0$; on a $u(ma_t n \cdot \xi^*) = \exp(-2t)$ pour tout $m \in M$, $n \in N$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour $\xi \in \Xi$ on a $\xi \in MAN \cdot \xi^* \Leftrightarrow u(\xi) > 0$ et $\xi \in MAN \cdot (-\xi^*) \Leftrightarrow u(\xi) < 0$.

D'autre part, $MAN \cdot \xi^* = AN \cdot \xi^*$ ce qui montre que $AN \cdot \xi^* \cup AN \cdot (-\xi^*)$ est un ouvert de Zariski donc dense dans Ξ.

L'expression de la mesure G-invariante sur Ξ dans cet ouvert est donnée par

$$\int_\Xi f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=0}^{1} \int_A \int_N f\big[a_t n(\alpha, p, q) \cdot (-1)^i \xi^*\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q,$$

où $f \in C_c(\Xi)$.