Bulletin de la S. M. F.

Jean-Pierre Conze

Albert Raugi

Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications

Bulletin de la S. M. F., tome 118, n° 3 (1990), p. 273-310

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_3_273_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 273–310.

FONCTIONS HARMONIQUES POUR UN OPÉRATEUR DE TRANSITION ET APPLICATIONS

PAR

JEAN-PIERRE CONZE ET ALBERT RAUGI (*)

RÉSUMÉ. — Soit u une fonction continue ≥ 0, définie sur $[0,1]$, telle que $u(x) + u(x+1/2) = 1$, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ et P_u l'opérateur de transition défini par $P_u f(x) = u(x/2)f(x/2) + u(x/2+1/2)f(x/2+1/2)$, f continue sur $[0,1]$. Nous faisons l'étude des fonctions invariantes par l'opérateur P_u et du comportement asymptotique de ses itérés $(P_u^n,\ n \in \mathbb{N})$. Nous appliquons les résultats à des équations fonctionnelles, à la construction des ondelettes et au filtrage.

ABSTRACT. — Let u be a continuous non-negative function, defined on $[0,1]$, such that $u(x) + u(x+1/2) = 1$, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ and P_u be the transition operator defined by $P_u f(x) = u(x/2)f(x/2) + u(x/2+1/2)f(x/2+1/2)$, f continuous on $[0,1]$. We study the asymptotic behaviour of the iterates $(P_u^n,\ n \in \mathbb{N})$, and give some applications to functional equations, wavelet theory and filtering.

I. Introduction

Soit u une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs positives ou nulles, vérifiant

$$u(x) + u\big(x + \tfrac{1}{2}\big) = 1, \text{ pour tout } x \in \big[0, \tfrac{1}{2}\big].$$

Nous considérons dans ce travail l'opérateur de transition P_u associé à u qui, à f continue sur $[0,1]$, fait correspondre $P_u f$ définie par :

$$P_u f(x) = u\Big(\frac{x}{2}\Big) f\Big(\frac{x}{2}\Big) + u\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big) f\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big).$$

L'étude du comportement de la suite des itérés $(P_u^n,\ n \in \mathbb{N})$ de ce type d'opérateur a fait l'objet de plusieurs travaux, généralement sous des hypothèses de régularité portant sur u (JAMISON [4], NORMAN [9]), ou de

(*) Texte reçu le 8 mars 1990.
J.-P. CONZE, A. RAUGI, Université de Rennes I, Laboratoire de Probabilités, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.

stricte positivité de u dans le cadre des mesures de Gibbs (WALTERS [12]). Elle est liée à la détermination des fonctions continues invariantes par P_u, appelées *fonctions P_u-harmoniques.*

Nous nous proposons ici de reprendre cette étude sous des hypothèses plus générales à la fois concernant la régularité de u et ses zéros. En effet, certains résultats peuvent être obtenus sous la seule hypothèse de continuité de u; d'autre part, l'étude du cas où u peut s'annuler permet de répondre à des questions posées, dans le cadre de la construction des 'g-mesures' en théorie ergodique, par M. KEANE [5].

Par ailleurs, nous présentons des applications de l'étude des fonctions P_u-harmoniques à des domaines débordant du cadre proprement dit des probabilités ou de la théorie ergodique. La construction donnée par Y. MEYER, S. MALLAT, I. DAUBECHIES (voir [7]) de bases d'ondelettes orthogonales dans le cadre de l'analyse multi-résolution est reliée à l'étude des fonctions P_u-harmoniques où u est une fonction intervenant dans cette construction.

Comme corollaire des résultats sur les fonctions harmoniques, nous pouvons donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que les fonctions construites par la méthode de l'analyse multi-résolution vérifient la condition d'orthogonalité, complétant ainsi les résultats obtenus par A. COHEN [1] dans ce domaine. L'application de l'algorithme pyramidal (S. MALLAT [6]) nous a également amenés à considérer les produits aléatoires d'opérateurs du type P_u. Il était donc nécessaire de préciser le comportement de la suite des itérés (P_u^n).

Enfin mentionnons une application de l'étude des fonctions P_u-harmoniques à l'équation fonctionnelle

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big)\Big],$$

où f est une fonction continue sur $]0,1[$. A côté de la solution classique fournie par $\operatorname{cotg}^2(\pi x)$, la méthode des martingales permet de faire apparaître une autre solution qui ne semble pas pouvoir s'obtenir par une méthode analytique élémentaire.

Ainsi l'objet de ce travail est double. D'une part étendre la théorie des opérateurs de transitions, d'autre part donner des exemples d'applications de cette théorie à des domaines variés. C'est d'ailleurs l'observation du rôle joué par ces opérateurs dans des domaines tels que la théorie des ondelettes, qui nous a conduit à en reprendre la théorie.

Pour simplifier, nous nous sommes placés dans le cadre dyadique décrit par l'opérateur P_u défini plus haut. Cet opérateur est un cas particulier d'opérateur de 'Perron-Frobenius' associé à la fonction u et à la transformation $x \mapsto 2x \bmod 1$. Le cadre dyadique nous a paru suffisant pour dégager les idées principales employées (propriétés géométriques des orbites, martingales, chaîne espace-temps), mais il est clair que les méthodes présentées ici se généralisent à une famille de transformations plus vaste, dont $x \mapsto 2x \bmod 1$ est le modèle.

Plan de l'article :

II. Définitions et notations

Soit $(E, \| \|_\infty)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme. Dans toute la suite, nous désignerons par u un élément de E, à valeurs positives, vérifiant

$$u(x) + u\big(x + \tfrac{1}{2}\big) = 1, \text{ pour tout } x \in \big[0, \tfrac{1}{2}\big].$$

Nous notons P_u l'opérateur de transition associé à u, défini sur E par :

$$P_u f(x) = u\Big(\frac{x}{2}\Big) f\Big(\frac{x}{2}\Big) + u\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big) f\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big).$$

Les solutions dans E de l'équation fonctionnelle

$$P_u h = h$$

seront appelées fonctions *P_u-harmoniques* continues.

Nous désignons par $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions P_u-harmoniques continues. Cet espace contient les fonctions constantes. Un cas important est celui où $\mathcal{H}$ ne contient que les constantes. C'est le cas, par exemple, comme on le voit facilement, quand la fonction u est strictement positive. Dans ce travail, nous montrerons que $\mathcal{H}$ est de dimension finie, et nous donnerons des conditions générales pour qu'il soit réduit aux constantes.

Pour $i \in \{0,1\}$, nous notons S_i la transformation affine de $\mathbb{R}$ définie par

$$S_i : x \longmapsto S_i(x) = \tfrac{1}{2}(x+i).$$

Par commodité, nous seront amenés dans certains cas à confondre dans la même notation la transformation S_i et l'indice i correspondant.

La donnée de u permet de définir une chaîne de Markov à valeurs dans $[0,1]$: à chaque étape, à partir d'un point x, deux transitions sont possibles vers les points $S_0(x)$ et $S_1(x)$ avec les probabilités respectives $u(S_0(x))$ et $u(S_1(x))$. La construction de ce processus sera précisée en IV. Les définitions ci-dessous sont de nature géométrique (voir par exemple NORMAN [9]).

Définitions. — Pour $x \in [0,1]$, nous appelons *trajectoire* de x tout sous-ensemble de $[0,1]$ de la forme $\{\sigma_n \cdots \sigma_1 x,\ n \geq 1\}$ où $\{\sigma_n,\ n \geq 1\}$ est une suite d'éléments de $\{S_0, S_1\}$ vérifiant $u(\sigma_n \cdots \sigma_1 x) \cdots u(\sigma_1 x) > 0$, pour tout $n \geq 1$.

L'adhérence de l'ensemble des trajectoires de x est un compact de $[0,1]$ appelé *orbite* de x. Un compact F de $[0,1]$ est dit *invariant*, si, pour tout $x \in F$ et tout $\sigma \in \{S_0, S_1\}$ tels que $u(\sigma x) > 0$, on a $\sigma x \in F$.

Un compact F est donc invariant s'il contient les orbites de chacun de ses points. L'orbite d'un élément quelconque de $[0,1]$ est un exemple de compact invariant.

Nous dirons que u est *proximale*, si les orbites de deux éléments quelconques de $[0,1]$ se recoupent. Autrement dit, u est proximale s'il n'existe pas deux compacts invariants disjoints.

Remarque. — Soit h une fonction P_u-harmonique continue. Alors l'ensemble des points de $[0,1]$, où h atteint son maximum (resp. son minimum) est un compact invariant. Si h est non constante, il existe donc deux compacts invariants disjoints. Ainsi la proximalité implique que l'espace $\mathcal{H}$ est réduit aux constantes. Dans la suite, nous préciserons le lien existant entre les fonctions harmoniques et les compacts invariants.

Définitions. — Nous appellerons '*mot*' de longueur N, tout N-uple de la forme $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$, avec $\sigma_k = S_0$ ou S_1, autrement dit tout élément de $\{S_0, S_1\}^N$.