BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRISTINE LESCOP

Un algorithme pour calculer l'invariant de Walker

Bulletin de la S. M. F., tome 118, nº 3 (1990), p. 363-376
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_3_363_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 363–376.

UN ALGORITHME POUR CALCULER L'INVARIANT DE WALKER

PAR

CHRISTINE LESCOP (*)

RÉSUMÉ. — En 1988, Kevin WALKER a étendu l'invariant de Casson aux sphères d'homologie rationnelle. Cette note décrit un procédé simple et programmable pour calculer l'invariant de Walker d'une sphère d'homologie rationnelle connue par l'un de ses diagrammes de chirurgies. (On appelle diagramme de chirurgie la projection régulière d'un entrelacs dont chaque composante est pondérée par un rationnel.)

ABSTRACT. — In his thesis, Kevin WALKER extends the invariant defined by A. CASSON for homology 3-spheres to rational homology spheres (3-manifolds with the same rational homology as S^3). The modification of Walker's invariant after a sugery on a single knot which transforms a rational homology sphere to another rational homology sphere is given by a Surgery Formula (see paragraph 0).

In this paper, we describe a simple and programmable process to calculate Walker's invariant of a rational homology sphere given by one of its surgery diagrams. (We call a surgery diagram a regular projection of a link, each component of which is framed by a rational number; we use Rolfsen's conventions to define the manifold presented by such a diagram (see [R], p. 259–260)).

The first section shows how to modify the diagram in a simple way so that the computation reduces to a finite sequence of applications of the Surgery Formula.

The second section is devoted to describe elementary methods to do it. Section 0 states a few results of Walker.

Introduction

Dans sa thèse, K. WALKER décrit une extension de l'invariant, défini par A. CASSON pour les sphères d'homologie entière, aux sphères d'homologie rationnelle (variétés de dimension 3, compactes, orientées, qui ont la même homologie rationnelle que S^3).

Une formule de Chirurgie (voir paragraphe 0) exprime la modification de l'invariant de Walker lors d'une chirurgie sur un nœud qui transforme une sphère d'homologie rationnelle en une autre sphère d'homologie rationnelle.

(*) Texte reçu le 12 avril 1990.
C. LESCOP, Université de Nantes, Département de Mathématiques, 2 rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1990/363/$ 5.00

Cette note décrit un procédé simple et programmable pour calculer l'invariant de Walker d'une sphère d'homologie rationnelle connue par l'un de ses diagrammes de chirurgies. (On appelle *diagramme de chirurgie* la projection régulière d'un entrelacs dont chaque composante est pondérée par un rationnel et on utilise les conventions de ROLFSEN (voir [R], p. 259–260) pour définir la variété présentée par un tel diagramme.)

Le premier paragraphe montre comment modifier simplement le diagramme de sorte que le calcul se réduise à une suite finie d'applications de la Formule de Chirurgie. Le deuxième paragraphe décrit des méthodes élémentaires pour appliquer la Formule.

Le paragraphe 0 énonce quelques résultats de K. WALKER.

0. Résultats de Walker

Notations :

Soit N un *cercle d'homologie rationnelle* (variété compacte orientée de dimension 3 de même homologie rationnelle que S^1) :

$\langle\, ,\rangle$ symbolise la forme d'intersection sur le tore ∂N bord de N orienté comme bord de N avec la convention de la normale intérieure dernier vecteur de base.

Si a est un *élément primitif* de $H_1(\partial N)$ (élément non nul représenté par une courbe simple $\hat{a}$ de ∂N) et si h est un difféomorphisme de $S^1 \times S^1$ dans ∂N qui envoie $S^1 \times \{\bullet\}$ sur $\hat{a}$, N_a désigne la variété $D^2 \times S^1 \cup_h N$.

On appelle *longitude entière* de N un générateur du noyau (isomorphe à $\mathbb{Z}$) de l'application ($i_* : H_1(\partial N) \to H_1(N)$) induite par l'inclusion.

$\Delta(N)$ désigne le polynôme d'Alexander normalisé de N.

$s(q,p)$ désigne la somme de Dedekind, définie pour les couples (p,q) de $\mathbb{Z}\backslash\{0\} \times \mathbb{Z}$, par

$$s(q,p) = \sum_{i=1}^{|p|} ((i/p))\,((qi/p)),$$

où $((x))$ est nul si x est élément de $\mathbb{Z}$ et égal à $(x - E(x) - \frac{1}{2})$ sinon.

sign est la fonction signe classique :

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

THÉORÈME (WALKER [W]). — *Il existe une unique fonction λ de l'ensemble des classes de sphères d'homologie rationnelle modulo les difféomorphismes orientés dans $\mathbb{Q}$ telle que :*

1) $\lambda(S^3) = 0$.

2) *Pour tout cercle d'homologie rationnelle N, si ν est une longitude entière de N, quels que soient les éléments primitifs a et b de $H_1(\partial N)$ tels que le produit $(\langle a,\nu\rangle\langle b,\nu\rangle)$ soit non nul, on a la Formule de Chirurgie :*

$$\lambda(N_b) = \lambda(N_a) + \tau(a,b;\nu) + \left[\frac{\langle a,b\rangle}{(\langle a,\nu\rangle\langle b,\nu\rangle)}\right] \cdot \Delta''(N)(1)$$

où, si x et y sont deux éléments de $H_1(\partial N)$ tels que $\langle x,y\rangle = 1$ et $\nu = \delta y$ avec $\delta \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\tau(a,b;\nu) = &-\operatorname{sign}\langle y,a\rangle s\big(\langle x,a\rangle,\langle y,a\rangle\big) + \operatorname{sign}\langle y,b\rangle s\big(\langle x,b\rangle,\langle y,b\rangle\big)\\ &+ \left[\frac{[(\delta^2-1)\cdot\langle a,b\rangle]}{12\langle a,\nu\rangle\langle b,\nu\rangle}\right].\end{aligned}$$

La fonction λ possède alors, entre autres, les propriétés :

3) *Pour toutes sphères d'homologie rationnelle M_1 et M_2 :*

$$\lambda(M_1\#M_2) = \lambda(M_1) + \lambda(M_2)$$

('#' symbolise la somme connexe).

4) *Pour toute sphère d'homologie entière H : $\lambda(H) = 2\lambda_c(H)$. ($\lambda_c$ est l'invariant de Casson de* [M].)

5) *Pour toute sphère d'homologie rationnelle M telle que $H_1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ soit trivial* $4|H_1(M)|^2\lambda(M) \equiv \mu(M)$ mod 16 (*μ désigne l'invariant de Rohlin*).

1. Modification du diagramme

Notations :

Soit D un diagramme de chirurgie, projection régulière d'un entrelacs à n composantes, K_1, $K_2,\ldots,K_n$, pondérées respectivement par les rationnels $r_1,r_2,\ldots,r_n$.

- Les *composantes* de D sont les nœuds $K_1,K_2,\ldots,K_n$.
- On note D_k, pour k appartenant à $\{0,1,\ldots,n\}$, le diagramme obtenu à partir de D en oubliant les composantes $K_{k+1},K_{k+2},\ldots,K_n$.
- $\chi(D)$ désigne la variété présentée par le diagramme D.

• D est dit *admissible* si, pour tout k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\chi(D_k)$ est une sphère d'homologie rationnelle.

Le but de ce paragraphe est de décrire un procédé économique pour transformer un diagramme de chirurgie qui présente une sphère d'homologie rationnelle en un diagramme admissible qui présente la même variété.

Remarque. — K. WALKER décrit, lors de la démonstration combinatoire du Théorème énoncé au paragraphe 0 ([W], Chapitre 5), une méthode pour rendre un diagramme admissible adaptée à l'utilisation théorique qu'il en donne. La méthode proposée ici est mieux adaptée au calcul pratique décrit dans cette note.

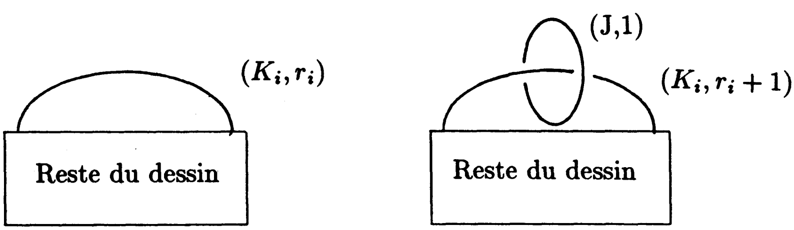
a. Description de la modification globale du diagramme.

On définit sur les diagrammes de chirurgie les deux opérations suivantes :

Renumération : permutation des indices de numérotation du diagramme.

Insertion : insertion à la $j^{\text{ième}}$ place d'une composante triviale J, pondérée par 1, méridienne d'une composante K_i $(i < j)$ dont le coefficient de pondération r_i est alors augmenté de un.

Le dessin du diagramme subit la transformation :



"Insérer à la $j^{\text{ième}}$ place" a modifié les notations de la manière suivante : après l'insertion, les couples (K_k, r_k) de D s'écrivent (K_{k+1}, r_{k+1}), pour k supérieur ou égal à j et le couple (K_j, r_j) désigne le couple $(J, 1)$.

Ces opérations ne modifient pas le type de difféomorphisme de la variété présentée et suffisent à rendre tout diagramme de sphère d'homologie rationnelle admissible; plus précisément, on a la :

PROPOSITION. — *Soit D un diagramme de chirurgie à n composantes qui présente une sphère d'homologie rationnelle; il existe un diagramme D' admissible obtenu à partir de D par :*