BULLETIN DE LA S. M. F.

J. D'ALMEIDA

Lieu singulier d'une surface réglée

Bulletin de la S. M. F., tome 118, nº 4 (1990), p. 395-401

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_4_395_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 395–401.

LIEU SINGULIER D'UNE SURFACE RÉGLÉE

PAR

J. D'ALMEIDA (*)

RÉSUMÉ. — On considère une surface réglée de degré n et de genre g de $P^3_{\mathbb{C}}$. On suppose que la surface S n'est pas un cône. Le lieu singulier de la surface réglée s'identifie à un diviseur ample du carré symétrique de la section plane de S dès que $n \geq 2g+3$ ($n \geq 2g+2$ si la section plane n'est pas hyperelliptique). On montre que le lieu singulier est connexe dès que $n \geq g+4$. Lorsqu'il n'est pas connexe, on montre qu'il est réunion disjointe de deux droites.

ABSTRACT. — Let S be a ruled surface of degree n and genus g in $P^3_{\mathbb{C}}$. We suppose that S is not a cone. We can consider the singular locus of the ruled surface as an ample divisor of the symmetric square of the plane section of S if $n \geq 2g+3$ ($n \geq 2g+2$ if the plane section is not hyperelliptic). We show that the singular locus is connected if $n \geq g+4$. When it is not connected, it is the union of two skew lines.

I. Introduction

On considère une surface réglée de degré n de $P^3_{\mathbb{C}}$. Si S est un cône, l'étude du lieu singulier de S se ramène à celle d'une section plane générale de S. On supposera donc que S n'est pas un cône. Soit C le modèle non singulier de la section plane générale de S. On note g le genre de C et C_2 son carré symétrique. La normalisée $\widetilde{S}$ de S s'écrit $\widetilde{S} = P(E)$ où E est un fibré de rang 2 et de degré n sur C. On note $\pi : \widetilde{S} \to C$ la projection.

Le morphisme $p : \widetilde{S} \to P^3 = \operatorname{Proj}(\operatorname{sym} V)$ d'image S correspond à une surjection $V \otimes O_{\widetilde{S}} \to O_{\widetilde{S}}(1)$ qui se décrit comme suit : V est un espace vectoriel de dimension 4 contenu dans $H^0(E)$. La surjection recherchée est la composée $V \otimes O_{\widetilde{S}} \to \pi^* E \to O_{\widetilde{S}}(1)$. Elle provient de l'évaluation $V \otimes O_C \to E$ et du quotient tautologique $\pi^* E \to O_{\widetilde{S}}(1)$. On remarquera que $V \otimes O_C \to E$ est surjectif si et seulement si $V \otimes O_{\widetilde{S}} \to O_{\widetilde{S}}(1)$ l'est. Il faut donc supposer que V engendre E. On note $\Delta \subset C \times C_2$ le diviseur effectif universel de degré 2 sur C. On désigne par a et b les projections

(*) Texte reçu le 25 septembre 1989, révisé le 10 octobre 1990.
J. D'ALMEIDA , Univ. de Caen, Dépt. de Mathématiques, 14032 Caen Cedex, France.

de $C \times C_2$ sur C et C_2. On pose $\varepsilon = b_*(a^*E \otimes O_\delta)$. Le module ε est localement libre de rang 4 car la restriction de b à Δ est un morphisme plat et fini de degré 2. L'image directe par b du morphisme de restriction $a^*E \to a^*E \otimes O_\Delta$ donne l'application $H^0(C,E) \otimes O_{C_2} \to \varepsilon$ et donc la flèche $\sigma : V \otimes O_{C_2} \to \varepsilon$. Si D est un élément de C_2 on a $\varepsilon_D = H^0(E/E(-D))$. On note Γ le schéma des zéros de $\det \sigma = \Lambda^4 \sigma$. On vérifie, en utilisant le fait que V engendre E, que $\det \sigma$ n'est pas identiquement nul. Décrivons maintenant le lieu double de p [4, pages 165–166]. On part de la suite exacte suivante sur $P^3 \times P^3$:

$$V \otimes O_{P_3 \times P_3} \to O_{P_3 \times P_3}(1,0) \oplus O_{P_3 \times P_3}(0,1) \to O_{\Delta'}(1) \to 0,$$

où Δ' désigne la diagonale de $P_3 \times P_3$. On considère alors l'image réciproque de cette suite exacte sur l'éclatement T de la diagonale de $\widetilde{S} \times \widetilde{S}$. Soit F le noyau de l'application évidente de $O_T(1,0) \oplus O_T(0,1)$ dans $O_K(1)$ où K est le diviseur exceptionnel de T. C'est un O_T-module localement libre de rang 2. La suite exacte ci-dessus donne une application O_T-linéaire $u : V \otimes O_T \to F$. Le cycle associé à $\operatorname{coker} u$ est le lieu double de p.

L'image directe de u par la projection de T dans $C \times C$ est identique à l'image réciproque de σ par la projection de $C \times C$ dans C_2. Le schéma des zéros de $\det \sigma$ admet donc pour image réciproque dans $C \times C$ l'image directe du cycle "lieu double de p".

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit S une surface réglée de degré n et de genre g de $P^3_{\mathbb{C}}$. On suppose que S n'est pas un cône et on note C le modèle lisse de la section plane générale de S et Γ le diviseur du carré symétrique de C défini ci-dessus.*

— *Si $g = 0$, Γ est ample.*
— *Si $g = 1$, Γ est ample dès que $n \geq 5$.*
— *Si $g \geq 2$ et C hyperelliptique, Γ est ample dès que $n \geq 2g + 3$.*
— *Si $g \geq 2$ et C non hyperelliptique, Γ est ample dès que $n \geq 2g + 2$.*

Le cas le plus simple de lieu singulier non connexe s'obtient lorsqu'on considère une surface réglée elliptique de degré 4. Le lieu singulier est alors la réunion de deux droites disjointes. De façon générale, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit S une surface réglée de degré n et de genre g de P^3. Le lieu singulier de S est connexe dès que $n \geq g + 4$. Lorsqu'il n'est pas connexe, le lieu singulier est réunion de deux droites disjointes (ensemblistement).*

2. Classes de Chern de ε

On utilisera les résultats suivants [1, page 338]. Soit $u : C_2 \to J$ l'application de C_2 dans la jacobienne de C [1, page 18]. Les classes de Chern sont prises dans $H^{\mathrm{pair}}(\ , \mathbb{Z})$. On note θ l'image réciproque sur C_2 de la classe du diviseur theta de J. On note x la classe du diviseur $X_q = q + C \subset C_2$ avec $q \in C$. La formule de Poincaré et la formule de projection permettent d'établir les relations $x^2 = 1$, $x\theta = g$, $\theta^2 = g(g-1)$.

On note η l'image réciproque sur $C \times C_2$ de la classe d'un point de C. Si δ est la classe du diviseur Δ on a $\delta = \delta^{20} + \delta^{11} + \delta^{02}$ dans la décomposition de Kunneth. On a $\delta = 2\eta + \gamma + x$ avec $\gamma^2 = -2\eta\theta$, $\eta^2 = \eta\gamma = \gamma^3 = 0$, $x^2\gamma = \theta^2\gamma = 0$. De plus b_* est une forme linéaire vérifiant $b_*(x) = b_*(\theta) = b_*(\gamma) = 0$, $b_*(\eta) = 1$.

PROPOSITION. — *Les classes de Chern de ε sont :*

$$c_1(\varepsilon) = 2\theta + \big(n - 2 - 2g\big)x\,;$$
$$c_2(\varepsilon) = 2(g-1)g + \tfrac{1}{2}(n + 2g - 2)(n - 2g - 1).$$

Preuve. — On applique le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch au morphisme b et au fibré $a^*E \otimes O_\Delta$. La restriction de b à Δ étant finie, le théorème s'écrit

$$\mathrm{td}(C_2)\,\mathrm{ch}(\varepsilon) = b_*\big[\mathrm{td}(C \times C_2)\,\mathrm{ch}(a^*E \otimes O_\Delta)\big]$$

où td désigne la classe de Todd et ch le caractère de Chern.

On a $c_1(a^*E \otimes O(-\Delta)) = n\eta - 2\delta$, $c_2(a^*E \otimes O(-\Delta)) = -n\eta\delta + \delta^2$. La relation $\mathrm{ch}(a^*E \otimes O_\Delta) = \mathrm{ch}(a^*E) - \mathrm{ch}(a^*E \otimes O(-\Delta))$ permet alors d'obtenir :

$$\mathrm{ch}(\varepsilon) = b_*\big[(1 + (1-g)\eta)(2\delta - \delta^2 + n\eta\delta + \tfrac{1}{6}(2\delta^3 - 3n\eta\delta^2).$$

En utilisant les relations rappelées ci-dessus on obtient

$$\mathrm{ch}(\varepsilon) = 4 + 2\theta + (n - 2 - 2g)x + (1 + g - \tfrac{1}{2}n)x^2 - 2\theta x.$$

Il en résulte les classes de Chern annoncées.

REMARQUE. — La formule d'adjonction dans C_2 s'écrit :

$$2g(\Gamma) - 2 = c_1(\varepsilon)(c_1(\varepsilon) + K_{C_2}),$$

où K_{C_2} est le diviseur canonique. En utilisant les relations

$$x^2 = 1, \quad x\theta = g, \quad \theta^2 = g(g-1), \quad c_1(C_2) = -\theta + (3-g)x,$$

[1, page 322], on obtient $2g(\Gamma) - 2 = (n-5)(n + 2g - 2)$.

On retrouve ainsi la formule classique donnant le genre géométrique du lieu singulier d'une surface réglée [2].

3. Amplitude

a) *Cas rationnel* : on a $C = P^1$ et $C_2 = P^2$. On identifie P^1 à une conique de P_2^* par le plongement de Veronese. Le diviseur universel est alors la restriction à $C \times P^2$ de la variété d'incidence point-droite de $P^{2*} \times P^2$. On a la résolution suivante :

$$0 \to O_{P^1}(-2) \otimes O_{P^2}(-1) \to O_{P^1 \times P^2} \to O_\Delta \to 0.$$

Après tensorisation par a^*E et image directe par b on obtient :

$$0 \to H^0\big(E(-2)\big) \otimes O_{P^2}(-1) \to H^0(E) \otimes O_{P^2} \to \varepsilon \to 0.$$

On en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & & \\
& & V \otimes O_{P^2} \arrow[d] \arrow[dr, "\sigma"] & & \\
0 \arrow[r] & H^0\big(E(-2)\big) \otimes O_{P^2}(-1) \arrow[r] \arrow[dr, "\beta"'] & H^0(E) \otimes O_{P^2} \arrow[r] \arrow[d] & \varepsilon \arrow[r] & 0 \\
& & \big(H^0(E)/V\big) \otimes O_{P^2} \arrow[d] & & \\
& & 0 & &
\end{tikzcd}$$

La courbe Γ a pour équation $\det \beta = 0$. Elle est de degré $(n-2)$. On a évidemment $n \geq 3$!

b) *Cas elliptique* : la courbe C est isomorphe à la jacobienne $J(C)$. On a $C_2 = P(F)$ où F est un fibré de rang 2. La surface C_2 est donc réglée. Le fibré F correspond à un élément non nul de $\mathrm{Ext}^1(O_C(A), O_C)$.

Cet espace vectoriel est de dimension 1 et F est unique à isomorphisme près modulo une translation sur C. Le diviseur Γ de classe $2\theta + (n-4)x$ est ample pour $n \geq 5$.([7, page 382]. Le cas $n = 4$ correspond à une surface réglée dont le lieu singulier est la réunion de droites disjointes.

c) *Cas* $g \geq 2$: on considère le morphisme $u : C_2 \to J$. On pose $W_2 = u(C_2)$. La classe fondamentale de W_2 est donnée par la