BULLETIN DE LA S. M. F.

J.-M. TREPREAU

Sur la propagation des singularités dans les variétés CR

Bulletin de la S. M. F., tome 118, n° 4 (1990), p. 403-450

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_4_403_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 403–450.

SUR LA PROPAGATION DES SINGULARITÉS DANS LES VARIÉTÉS CR

PAR

J.-M. TREPREAU (*)

RÉSUMÉ. — Nous démontrons un théorème général de propagation des singularités hypo-analytiques pour les solutions des équations de Cauchy-Riemann induites. Comme applications, nous étudions la propagation de la propriété de prolongement holomorphe à un wedge et nous donnons des exemples de solutions qui ne sont pas sommes de valeurs au bord de fonctions holomorphes.

ABSTRACT. — We give a general result of propagation of hypoanalytic singularities for solutions of induced Cauchy-Riemann equations. As applications, we study the propagation of holomorphic extendability to a wedge and we give examples of solutions which can not be written as sums of boundary values of holomorphic functions.

L'étude du prolongement holomorphe des fonctions CR a connu plusieurs succès ces dernières années. Le résultat le plus remarquable est peut-être le théorème général de prolongement de A. E. TUMANOV [23]. Nous nous intéressons ici à la propagation des singularités hypoanalytiques des fonctions CR définies sur une sous-variété générique M de $\mathbb{C}^n$. Dans [12] N. HANGES et F. TRÈVES montrent que la propriété de prolongement holomorphe local se propage le long des sous-variétés complexes de M. Quand M est analytique réelle, on obtient un résultat plus fort en appliquant le théorème de propagation microlocale de N. HANGES et J. SJÖSTRAND [11]. Le but de cet article est de prouver une version CR générale du théorème de N. HANGES et J. SJÖSTRAND. Nous obtiendrons (THÉORÈME 7) que les singularités se propagent le long des sous-variétés CR minimales (au sens de Tumanov) de $T^*_M\mathbb{C}^n$. De telles sous-variétés, non triviales, existent en particulier quand M n'est pas minimale (THÉORÈMES 8, 9, 10).

Ces théorèmes ont plusieurs applications intéressantes. Quand M n'est pas minimale, utilisant les fonctions CR singulières récemment construites

(*) Texte reçu le 9 décembre 1989, révisé le 13 septembre 1990.

J.-M. TREPREAU, Univ. Paris VI, Analyse Complexe et Géométrie, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

par M. S. BAOUENDI et L. P. ROTHSCHILD [6], nous montrerons que, lorsque le défaut local de M (Définition I.2.1) est au moins deux, M porte “en général” des fonctions CR qui ne sont pas sommes de valeurs au bord de fonctions holomorphes (THÉORÈMES 5, 6), ce qui généralise un exemple (non publié) que nous avions donné en 1985. Les autres applications concernent la propagation de la propriété pour une fonction CR d'être prolongeable à un wedge (THÉORÈMES 2, 3, 4). Outre les résultats de propagation microlocale, elles utilisent une généralisation du théorème de Tumanov (THÉORÈME 1) que la méthode de Tumanov donne facilement : si le défaut local de M en un point z est s, les fonctions CR sur M se prolongent en fonctions CR sur un “wedge” de codimension s dans $\mathbb{C}^n$, près de z.

La démonstration des théorèmes microlocaux repose sur la notion de front d'onde hypoanalytique, introduite par M. S. BAOUENDI, C.H. CHANG et F. TRÈVES [3], qui rend les mêmes services dans l'étude des fonctions CR que le micro-support de SATO [15] dans l'étude des singularités analytiques. Nous adopterons le point de vue de J. SJÖSTRAND [16], [17] : les transformations, dites F.B.I., qui servent à définir le front d'onde quantifient des transformations canoniques complexes non homogènes. Une telle transformation ramène l'étude de la propagation des singularités à l'étude de la propagation d'une estimation pour une fonction holomorphe dépendant d'un grand paramètre. Classiquement dans cette étude ([9′], [12], [17]) intervient le théorème des trois cercles de Hadamard (on pourrait à la place utiliser le lemme de Hopf). Dans le cas général, les feuilles qui propagent les singularités ne sont pas des variétés holomorphes, mais des variétés CR. Nous nous ramenons à une situation où le principe du maximum et ses variantes s'appliquent grâce à une construction de disques complexes, via l'équation de Bishop. C'est peut-être l'originalité de ce papier de combiner les méthodes microlocales et la méthode des disques complexes.

Le chapitre I est une (assez longue) introduction aux fonctions CR et à leurs singularités. Nous y énonçons nos principaux résultats.

Dans le chapitre II nous établissons les résultats sur l'équation de Bishop dont nous aurons besoin et nous démontrons le THÉORÈME 1.

Les théorèmes d'application sont prouvés dans le chapitre III, les théorèmes de propagation microlocale dans le chapitre IV.

I. Introduction

1. Notations. — $T\mathbb{C}^n$ est le fibré tangent réel à $\mathbb{C}^n$. Nous noterons $\sqrt{-1}$ l'opérateur qui définit sa structure complexe canonique :

$$\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Les vecteurs antiholomorphes (resp. holomorphes) sont ainsi les vecteurs complexes de la forme $X + i\sqrt{-1}\,X$ (resp. $X - i\sqrt{-1}\,X$), $X \in T\mathbb{C}^n$. $T^*\mathbb{C}^n$ est le fibré des $(1,0)$-formes $\omega = \sum_{j=1}^n \zeta_j \mathrm{d}z_j$. C'est un espace complexe, muni des coordonnées canoniques (z,ζ). $T^*\mathbb{C}^n$ s'identifie au dual sur $\mathbb{C}$ de $T\mathbb{C}^n$ par :

$$\omega = \sum_{j=1}^n \zeta_j \mathrm{d}z_j \,; \qquad \Big\langle \omega, \frac{\partial}{\partial x_k} \Big\rangle = \frac{1}{i}\Big\langle \omega, \frac{\partial}{\partial y_k} \Big\rangle = \zeta_k.$$

On utilisera surtout la dualité réelle définie par :

$$(\omega, X) \in T^*\mathbb{C}^n \times T\mathbb{C}^n \quad (\omega, X) \mapsto \operatorname{Im}\langle \omega, X\rangle. \tag{1.1}$$

Soit M une sous-variété réelle de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$. $T_M\mathbb{C}^n = T\mathbb{C}^n{}_{|M} \bmod TM$ est le fibré normal à M. On utilise la dualité (1.1) pour définir le conormal à M dans $\mathbb{C}^n$:

$$T^*_M\mathbb{C}^n[z] = \Big\{\omega \in T^*_z\mathbb{C}^n, \quad \operatorname{Im}\omega_{|T_zM} = 0\Big\}.$$

Les fibrés $T_M\mathbb{C}^n$ et $T^*_M\mathbb{C}^n$ sont en dualité par

$$\big(\omega, X \bmod TM\big) \longmapsto \operatorname{Im}\langle \omega, X\rangle. \tag{1.2}$$

Un wedge (au-dessus de M) en $(z,\theta) \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n$ est un ouvert de la forme :

$$\mathcal{W} = \big\{z' + \theta' \,;\; z' \in U,\; \theta' \in \Gamma\big\} \cap \Omega,$$

où Ω est un voisinage ouvert de z dans $\mathbb{C}^n$, $U = M \cap \Omega$, et Γ un voisinage ouvert conique dans $T_z\mathbb{C}^n$, ici identifié à $\mathbb{C}^n$, d'un représentant de θ. La définition est indépendante, dans les germes, du choix d'un représentant de θ au sens où tout wedge défini à partir d'un choix contient un wedge défini à partir d'un autre choix.

Nous venons d'utiliser les notations suivantes : si $\mathcal{T}$ est un fibré vectoriel sur M, $\dot{\mathcal{T}}$ désigne le même fibré, privé de la section nulle, $\mathcal{T}_z$, ou $\mathcal{T}[z]$ quand la place manque, la fibre de $\mathcal{T}$ en $z \in M$, $\mathcal{T}_{|N}$ la restriction de $\mathcal{T}$ à une sous-variété N de M.

Si $\widetilde{M}$ est une variété de classe $\mathcal{C}^1$ à bord dans $\mathbb{C}^n$, de bord M, les vecteurs tangents rentrant dans $\widetilde{M}$ en $z \in M$ remplissent un demi-espace de la forme $T_zM + \dot{\mathbb{R}}^+\theta$, $\theta \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n[z]$. Nous dirons que $\widetilde{M}$ définit la direction $\theta \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n[z]$, ou $(z,\theta) \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n$.

Soit E, E' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, en dualité. On note $\dot{E} = E \setminus 0$, $\dot{E}' = E' \setminus 0$ et si Γ est un cône dans E, $\dot{\Gamma} = \Gamma \setminus 0$. Un cône Γ dans $\dot{E}$ est dit saillant s'il est contenu dans un cône fermé convexe de $\dot{E}$. Ainsi, si Γ est un cône convexe fermé dans E, $\dot{\Gamma}$ est saillant si et seulement si $\dot{\Gamma}$ ne contient pas deux points antipodaux. Plus généralement, un cône fermé Γ de $\dot{E}$ est saillant si une somme $\sum_{i=1}^{N} \theta_i$, $\theta_i \in \Gamma$, n'est jamais nulle. Le polaire d'un cône $\Gamma \subset \dot{E}$ est le cône fermé $\Gamma^0 \subset \dot{E}'$ défini par

$$\Gamma^0 = \Big\{\omega \in \dot{E}', \ \langle \omega, \theta\rangle \geq 0 \ \text{pour tout } \theta \in \Gamma\Big\}.$$

$\Gamma^0 \cup \{0\}$ est toujours convexe, mais pas Γ^0.

Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathfrak{X}$ un système de champs de vecteurs réels sur M, de classe $\mathcal{C}^1$. Une courbe intégrale (par morceaux) de $\mathfrak{X}$ est une courbe γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans M obtenue en partant d'un point $x \in M$, en intégrant successivement des champs $X_1, \dots, X_N \in \mathfrak{X}$ pendant des temps $t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}$ tels que le point $x' = e^{t_N X_N} \cdots e^{t_1 X_1} x$ soit bien défini; x est l'origine, x' l'extrémité de γ. L'orbite de $x \in M$, notée $\mathcal{O}(\mathfrak{X}, x)$ est l'ensemble des extrémités des courbes intégrales de $\mathfrak{X}$ d'origine x. L'analyse de H. J. SUSSMANN [19], écrite dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$ s'applique sans changement ou presque (les (a), (b) du théorème 4.1 de [19] restent vrais dans le cadre $\mathcal{C}^1$) : on peut munir canoniquement l'orbite $\mathcal{O}(\mathfrak{X}, x)$ d'une structure de variété $\mathcal{C}^1$ (la topologie peut être plus fine que la topologie induite par M) telle que l'injection $i : \mathcal{O}(\mathfrak{X}, x) \to M$ soit une immersion de classe $\mathcal{C}^1$. En particulier, l'image par i d'un voisinage ouvert assez petit de x est une sous-variété de M au sens usuel, soit N; par construction $x \in N$ et les éléments de $\mathfrak{X}$ sont tangents à N. La famille $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_{|U}, x)$, U voisinage ouvert de x dans M, est évidemment décroissante et stationnaire dans les germes. Sa limite est un germe de variété en x, appelé orbite locale de x et notée $\mathcal{O}^{\text{loc}}(\mathfrak{X}, x)$.

2. Variétés CR. Fonctions CR. — Soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}^n$. Pour $z \in M$, on identifie comme plus haut T_zM à un sous-espace de $T_z\mathbb{C}^n$ et on note $T_z^cM = T_zM \cap \sqrt{-1}\, T_zM$ l'espace tangent complexe en z à M. M est une variété CR si la dimension complexe