Bulletin de la S. M. F.

Aviva Szpirglas

Singularités de bord : dualité, formules de Picard Lefschetz relatives et diagrammes de Dynkin

Bulletin de la S. M. F., tome 118, n° 4 (1990), p. 451-486

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_4_451_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 451–486.

SINGULARITÉS DE BORD : DUALITÉ, FORMULES DE PICARD LEFSCHETZ RELATIVES ET DIAGRAMMES DE DYNKIN

PAR

AVIVA SZPIRGLAS (*)

RÉSUMÉ. — On étudie les singularités de bord en tant qu'extension de la singularité ordinaire associée et de la singularité ordinaire de la section hyperplane, ce qui permet de définir les dualités entre les deux groupes d'homologie associés à la singularité de bord considérée. Ceci permet aussi, pour les opérateurs de monodromie relative, de montrer des formules de Picard Lefschtetz relatives. On construit également deux diagrammes de Dynkin associés à chaque singularité de bord relativement à des bases distinguées, ces deux diagrammes étant duaux l'un de l'autre. Dans le cas des singularités simples, en utilisant la géométrie du discriminant relatif, les diagrammes de Dynkin obtenus sont les mêmes que ceux des systèmes de racines de même nom.

ABSTRACT. — We study singularities with boundary as extensions of the associated ordinary singularity and of the ordinary singularity of the hyperplane section. Then, we can define the dualities between the two homology groups associated to each singularity with boundary. We proof relative Picard Lefschetz formulas for the operators of relative monodomy and we construct two dual Dynkin diagrams, associated to relative distinguished bases. In the case of simple singularities, the Dynkin diagrams obtained by using the geometry of the relative discriminant are the Dynkin diagrams of the roots system of same name.

Introduction

Un *germe de singularité de bord* (f,H) est la donnée d'un germe de fonction holomorphe en 0, $f : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$, et d'un hyperplan H de $\mathbb{C}^{n+1}$ ($H \supset 0$) tels que f et $f_{|H}$ admettent 0 comme point singulier isolé (on dit alors que f et $f_{|H}$ sont des *singularités absolues ou ordinaires*).

Ces singularités de bord ont été étudiées par ARNOLD [1] ; il associe à chaque singularité de bord une singularité ordinaire invariante par

(*) Texte reçu le 8 janvier 1990, révisé le 23 octobre 1990.
Unité de recherche associée au CNRS n^{0} 742, Université Paris Nord, Av. J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France.

l'action du groupe $\mathbb{Z}_2$. Ce qui lui permet d'étudier un sous espace de l'homologie de la fibre de Milnor de cette singularité ordinaire, sous espace isomorphe à $H_n(F, F \cap H)$, qui est l'un des objets homologiques qui jouent naturellement le rôle de $H_n(F)$ pour (f, H) (F est la fibre de Milnor de f).

De plus, G.G. ILYUTA (dans [5]), associe à chaque singularité de bord un diagramme de Dynkin déduit du diagramme de Dynkin de la singularité ordinaire associée, diagramme qui est naturellement muni d'une involution.

Dans cet article, on se propose de donner une nouvelle approche des résultats d'Arnold, basée sur la dualité existant dans la situation considérée. On dispose en effet de deux "homologies de la fibre de Milnor", à savoir $H_n(F, F \cap H)$ et $H_n(F \setminus F \cap H)$.

Ces homologies sont extensions des homologies $H_n(F)$ et $H_{n-1}(F \cap H)$ de deux manières duales (voir PROPOSITION 1.2.1).

Par ailleurs, la théorie du déploiement universel fait apparaître la base du déploiement versel pour (f, H) (ou plutôt son espace tangent à l'origine) comme extension des bases pour f et $f_{|H}$ de deux manières duales (voir LEMME 2.1.3).

Il existe dans la base de ce déploiement deux discriminants. On exploite la position relative de ceux-ci pour construire des bases distinguées duales pour $H_n(F, F \cap H)$ et $H_n(F \setminus F \cap H)$.

C'est à ces bases distinguées duales qu'on associe deux diagrammes de Dynkin duaux qui — dans le cas de B_μ, C_μ et F_4 — correspondent aux diagrammes de Dynkin des systèmes de racines de même nom.

Pour donner un sens à ceci, on explicite les formes d'intersection et de Seifert de la situation et on montre les formules de Picard-Lefschetz correspondantes (qui n'étaient pas établies pour les singularités de bord) (voir § 2).

REMARQUE. — Dans [7], W. EBELING étudie une situation similaire à celle vue ici; on peut en effet considérer la singularité $(f_{|H}, 0)$ comme la singularité d'intersection complète (f, ℓ), où ℓ est la forme linéaire définissant l'hyperplan H. Mais, alors que dans ce travail, on s'intéresse au comportement *relatif* de la singularité $(f, 0)$ et de l'intersection complète (f, ℓ), W. EBELING étudie le comportement de (f, ℓ) dont la fibre de Milnor est plongée dans la fibre de Milnor d'une intersection complète de dimension n (qui, dans le cas particulier présent, est lisse). Ainsi, c'est l'action des opérateurs de monodromie définis par le discriminant ordinaire de $(f_{|H}, 0)$ sur $H_{n-1}(F)$ qui est donnée par les formules de Picard Lefschetz relatives démontrées dans [7] (et qui se réduisent ici aux formules de Picard Lefschetz ordinaires pour la singularité $(f_{|H}, 0)$).

1. Homologies

Soit (f,H) un bon représentant d'une singularité de bord ($f : X_0 \to \mathbb{D}$, où $\mathbb{D}$ est un disque centré en 0 de $\mathbb{C}$). On suppose (ce qui est toujours possible, voir [1]), et quitte à diminuer le rayon de la boule de Milnor de f, que la fibration de Milnor de f est telle que, si F_s est la fibre de Milnor de f au dessus de $s \neq 0$, alors $F_s \cap H$ est la fibre de Milnor de $f_{|H}$ au dessus de s. De plus, si h est la monodromie de f ($h : F_s \to F_s$), alors $h_{|F_s \cap H}$ est la monodromie de $f_{|H}$.

Les deux groupes d'homologie, qui jouent le rôle de $H_n(F)$ pour la singularité ordinaire f, sont, pour (f,H),

$$H_n(F \setminus F \cap H; \mathbb{Z}) \text{ et } H_n(F, F \cap H; \mathbb{Z}).$$

On démontre d'abord dans le premier paragraphe de cette section que les deux groupes d'homologie $H_n(F, F \cap H)$ et $H_n(F \setminus F \cap H)$ sont des extensions de $H_n(F)$ et $H_{n-1}(F \cap H)$.

Puis, on généralise dans le deuxième paragraphe les notions de formes d'intersection et de Seifert : on définit deux formes d'intersection sur $H_n(F, F \cap H) \times H_n(F \setminus F \cap H)$ ainsi que deux formes de Seifert, qui se trouvent être extensions de ces mêmes notions connues sur $H_n(F)$ et $H_{n-1}(F \cap H)$.

Pour cela, deux énoncés sont importants :

• le Lemme 1.1.1, qui établit un isomorphisme entre les $\mathbb{Z}$-duaux de $H_n(F, F \cap H)$ et $H_n(F \setminus F \cap H)$;

• la Proposition 1.3.2, qui permet de définir les deux formes de Seifert via les morphismes variation.

Le dernier paragraphe généralise les formules qui relient dans le cas absolu formes d'intersection, formes de Seifert, morphismes variation et monodromie. On obtient dans ce cadre le Théorème 1.3.10.

1.1 Dualité.

On démontre tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 1.1.1. — *Le $\mathbb{Z}$ dual de $H_n(F \setminus F \cap H; \mathbb{Z})$ ($\simeq H_n(F \setminus T^0(F \cap H))$), qui est le groupe $H_n(F \setminus T^0(F \cap H), \partial(F \setminus T^0(F \cap H)))$ vérifie :*

$$H_n\big(F \setminus T^0(F \cap H), \partial(F \setminus T^0(F \cap H))\big) \simeq H_n\big(F, (F \cap H) \cup \partial F\big)$$

qui est le $\mathbb{Z}$ dual de $H_n(F, F \cap H)$ (via la dualité de Lefschetz).

($T^0(F \cap H)$ désigne ici un voisinage tubulaire de $F \cap H$ dans F).

Démonstration. — Par excision :

$$H_n(F \setminus T^0(F \cap H), \partial(F \setminus T^0(F \cap H))) \simeq H_n(F, \partial(F \setminus T^0(F \cap H)) \cup T^0(F \cap H))$$

et :
$$H_n(F, \partial(F \setminus T^0(F \cap H)) \cup T^0(F \cap H)) \simeq H_n(F, T^0(F \cap H) \cup \partial F) \simeq H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F).$$

Par la suite, on identifie le groupe d'homologie

$$H_n(F \setminus T^0(F \cap H), \partial(F \setminus T^0(F \cap H)))$$

à $H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F)$, via l'isomorphisme du LEMME 1.1.1.

1.2 Liens avec les singularités $(f, 0)$ et $(f_{|H,0})$.

PROPOSITION 1.2.1. — *On a les deux paires de suites exactes duales suivantes :*

$$(a_1) \qquad 0 \leftarrow H_n(F, \partial F) \xleftarrow{\alpha'_1} H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F) \xleftarrow{\alpha'_2} H_{n-1}(F \cap H, \partial F \cap H) \leftarrow 0,$$

$$(b_1) \qquad 0 \to H_n(F) \xrightarrow{\alpha_1} H_n(F, F \cap H) \xrightarrow{\alpha_2} H_{n-1}(F \cap H) \to 0,$$

$$(a_2) \qquad 0 \to H_n(F, \partial F) \xrightarrow{\beta'_1} H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F) \xrightarrow{\beta'_2} H_{n-1}(F \cap H, \partial F \cap H) \to 0,$$

$$(b_2) \qquad 0 \leftarrow H_n(F) \xleftarrow{\beta_1} H_n(F \setminus F \cap H) \xleftarrow{\beta_2} H_{n-1}(F \cap H) \leftarrow 0,$$

où le morphisme β_2 est défini ainsi : soit $x \in H_{n-1}(F \cap H)$, soit $\tilde{x}$ un cycle de $F \cap H$ représentant x, soit $T^0(\tilde{x})$ un voisinage tubulaire de $\tilde{x}$ dans F ; alors $\beta_2(x)$ est la classe de $\partial T^0(\tilde{x})$ dans $H_n(F \setminus F \cap H)$.

Démonstration :

1) La deuxième suite est la suite exacte longue d'homologie pour la paire $(F, F \cap H)$; la première s'en déduit par dualité (via la dualité de Lefschetz).

2) On a la suite exacte suivante, déduite de la suite exacte longue

$$0 \to H_n(F, \partial F) \to H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F) \to H_{n-1}((F \cap H) \cup \partial F) \to 0.$$