FATHI BEN NASR

Dimension d'ensembles plans définis par des propriétés des développements des coordonnées

Bulletin de la S. M. F., tome 118, nº 1 (1990), p. 55-65
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_1_55_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 55–65.

DIMENSION D'ENSEMBLES PLANS DÉFINIS PAR DES PROPRIÉTÉS DES DÉVELOPPEMENTS DES COORDONNÉES

PAR

FATHI BEN NASR (*)

RÉSUMÉ. — Soit r_1 et r_2 deux nombres entiers ≥ 2. Pour chaque point (x, y) du plan, on développe x suivant la base r_1 et y suivant la base r_2. On considère les ensembles des points (x, y) dont les fréquences d'apparition des couples consécutifs de "chiffres" sont données. On donne un encadrement de leur dimension.

ABSTRACT. — Let r_1 and r_2 be two integers ≥ 2. Ford each point (x, y) of the plane, we expand x in base r_1 and y in base r_2. We consider the sets of points (x, y) for which frequencys of consecutive pairs of "digits" are given. We given lower and upper bounds of their dimension.

1. Introduction

Considérons une famille $\mathcal{E}$ de parties du carré $[0,1] \times [0,1]$ telle que tout point x de ce carré appartienne à des éléments de $\mathcal{E}$, non vides et dont le diamètre soit arbitrairement petit (nous prenons comme distance de deux points le maximum des valeurs absolues des différences des coordonnées). Si E est une partie du carré $[0,1] \times [0,1]$, notons $\operatorname{diam} E$ son diamètre. Si, de plus, d et ε sont deux nombres strictement positifs, posons

$$H_{d,\varepsilon}(E, \mathcal{E}) = \inf\Big\{\sum_j (\operatorname{diam} R_j)^d : E \subset \bigcup R_j,\ R_j \in \mathcal{E} \text{ et } \operatorname{diam} R_j \leq \varepsilon\Big\};$$

$$H_d(E, \mathcal{E}) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_{d,\varepsilon}(E, \mathcal{E}) \text{ et } \dim_{\mathcal{E}} E = \inf\big\{d\,;\ H_d(E, \mathcal{E}) = 0\big\}\cdot$$

Lorsque $\mathcal{E}$ est constituée de tous les carrés, on obtient la dimension de Hausdorff que nous noterons dim. Dans [9] on donne des conditions sur $\mathcal{E}$ assurant l'identité $\dim_{\mathcal{E}} = \dim$. Cependant plusieurs situations amènent

(*) Texte reçu le 13 avril 1989, révisé le 16 janvier 1990.
F. BEN NASR, Faculté des Sciences de Monastir, Dépt. de Mathématiques, Monastir, Tunisie et Univ. Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

à considérer des familles ne donnant pas lieu à cette identité; c'est le cas de [2, 6, 10]. Nous nous plaçons ici dans de telles situations. En effet nous étudions la dimension de Hausdorff de certaines parties du carré $[0,1]\times[0,1]$ dont les recouvrements naturels se font au moyen de rectangles qui s'aplatissent à mesure que leur diamètre tend vers zéro. Il se pose donc le problème de passer d'un recouvrement économique par des rectangles à un recouvrement économique par des carrés et vice-versa. Les ensembles que nous étudions sont définis par des propriétés des développements dans des bases différentes des coordonnées de leurs points. Dans certains cas nous savons déterminer la dimension de Hausdorff de ces ensembles, dans d'autres nous en obtenons seulement un encadrement, généralisant ainsi des résultats d'EGGLESTON [4] et améliorant [1]. D'autres généralisations du résultat d'EGGLESTON ont été considérées dans [8]. Cette étude est à rapprocher de celles des ensembles self-affines ([6] et [7]).

2. Position du problème et résultats

Si F est un ensemble fini, on note F^* l'ensemble des mots construits avec F comme alphabet. La longueur d'un élément j de F^* est notée $|j|$, le mot de longueur nulle est noté ω. Muni de la concaténation, F^* est un monoïde : si j et k appartiennent à F^*, on note jk le mot obtenu en mettant les mots j et k bout à bout. On identifie $(F\times G)^*$ à une partie de $F^*\times G^*$.

Pour tout entier r supérieur ou égal à 2, on pose $N_r=\{0,1,\ldots,r-1\}$. A chaque élément j de N_r^* on associe l'intervalle

$$I_r(j)=\Big[\sum_{1\le k\le|j|} j_k r^{-k},\ \sum_{1\le k\le|j|} j_k r^{-k}+r^{-|j|}\Big[.$$

Soient r_1 et r_2 deux entiers tels que $2\le r_1<r_2$. Si $j=(j^1,j^2)$ appartient à $(N_{r_1}\times N_{r_2})^*$, on note $R(j)$ ou $R(j^1,j^2)$ le rectangle produit des intervalles $I_{r_1}(j^1)$ et $I_{r_2}(j^2)$.

Pour tout entier n, on désigne par $q(n)$ la partie entière

$$n(\operatorname{Log} r_2/\operatorname{Log} r_1) : n(\operatorname{Log} r_2/\operatorname{Log} r_1)\le q(n)< n(\operatorname{Log} r_2/\operatorname{Log} r_1)+1.$$

Si j appartient à $(N_{r_1}\times N_{r_2})^*$ et k à $N_{r_1}^{q(|j|)-|j|}$, on pose $Q(j,k)=I_{r_1}(j^1k)\times I_{r_2}(j^2)$. C'est ce qu'on appellera dans la suite un "presque carré". Il est facile de vérifier que la famille des presque carrés $\mathcal{E}_1$ permet le calcul de la dimension de Hausdorff (voir, par exemple [8]).

Pour tout x de $R(\omega)=[0,1[\times[0,1[$, notons x_n (resp. y_n) le n-ième chiffre du développement de l'abscisse de x (resp. l'ordonnée de x) dans la base r_1 (resp. r_2).

Dans [1] nous avons étudié la dimension de l'ensemble des x tels que pour chaque α et β l'ensemble $\{i \geq 1\,;\ (x_j, y_i) = (\alpha, \beta)\}$ ait une densité donnée. Nous avons obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME 1. — *Pour tout x de $R(\omega)$ désignons par $N_{\alpha\beta}(x,n)$ le nombre d'entiers i inférieurs à n tels que $(x_i, y_i) = (\alpha, \beta)$ et considérons l'ensemble*

$$E = \Big\{x\,;\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_{\alpha\beta}(x,n) = m_{\alpha\beta} \ \text{pour tout}\ (\alpha,\beta)\Big\}.$$

La dimension de Hausdorff de E est

$$-\frac{1}{\operatorname{Log} r_2} \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \operatorname{Log} m_{\alpha\beta} + \Big(\frac{1}{\operatorname{Log} r_2} - \frac{1}{\operatorname{Log} r_1}\Big) \sum_{\alpha} S_\alpha \operatorname{Log} S_\alpha,$$

où S_α désigne la somme des éléments de la α-ième ligne de la matrice des $(m_{\alpha\beta})$.

Nous nous intéressons ici aux ensembles définis par la fréquence des couples de chiffres consécutifs. Pour tout x de $R(\omega)$, notons $N_{\alpha\beta,\alpha',\beta'}(x,n)$ le nombre d'entiers i inférieurs à n tels que l'on ait $(x_i, y_i) = (\alpha, \beta)$ et $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (\alpha', \beta')$. Considérons l'ensemble suivant

$$A = \Big\{x\,;\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}(x,n) = m_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} \quad \text{pour tous}\ (\alpha,\beta)\ \text{et}\ (\alpha',\beta')\Big\}$$

où $M = (m_{\alpha\beta,\alpha'\beta'})$ est une matrice donnée, indexée par $(N_{r_1} \times N_{r_2})^2$ et vérifiant les deux conditions suivantes :

- les coefficients $m_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}$ sont strictement positifs et de somme 1 ;
- l'égalité $\sum_{\alpha'\beta'} m_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} = \sum_{\alpha'\beta'} m_{\alpha'\beta',\alpha\beta}$ a lieu quels que soient α et β.

Le théorème suivant, sous une hypothèse additionnelle sur la matrice M, donne une formule explicite de la dimension de A.

THÉORÈME 2.

Posons $P_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'\beta'} m_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}$, $P_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} = m_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}/P_{\alpha\beta}$ et $b_\alpha = \sum_\beta P_{\alpha\beta}$. Si pour tout couple (α,α') la somme $\sum_{\beta'} P_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}$, notée $R_{\alpha\alpha'}$, est indépendante de β alors la dimension de Hausdorff de A est

$$D = -\frac{1}{\operatorname{Log} r_2} \sum_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} P_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} \operatorname{Log} P_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} + \Big(\frac{1}{\operatorname{Log} r_2} - \frac{1}{\log r_1}\Big) \sum_{\alpha\alpha'} b_\alpha R_{\alpha\alpha'} \operatorname{Log} R_{\alpha\alpha'}.$$

Cette hypothèse supplémentaire est vérifiée dans le cas où $m_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}$ est de la forme $u_{\alpha\beta}u_{\alpha'\beta'}$.

Démonstration. — Considérons l'arbre $\mathcal{A}$ formé par les suites finies d'éléments de $N_{r_1} \times N_{r_2}$. Soit $\mathcal{A} \cup \partial\mathcal{A}$ sa compactification naturelle. Il existe une probabilité unique sur $\partial\mathcal{A}$, soit $\tilde{\mu}$, telle que la suite des coordonnées de $\partial\mathcal{A}$ soit une chaîne de Markov, de loi initiale $P_{\alpha\beta}$ et de matrice de transition $(P_{\alpha\beta,\alpha'\beta'})$. Si ψ désigne l'application naturelle de $\partial\mathcal{A}$ dans $[0,1]^2$ alors la mesure image de $\tilde{\mu}$ par ψ, notée μ, est une probabilité sur la tribu de Borel de $R(\omega)$ portée par A. De plus pour tout j

$$\mu\big(R(j)\big) = P_{j_1} P_{j_1,j_2} \dots P_{j_{n-1},j_n}$$

car les cloisons sont de mesures nulles.

Pour tout x de $R(\omega)$, désignons par $R_n(x)$ (resp. $Q_n(x)$) le rectangle (resp. le "presque carré") d'ordre n contenant x, c'est-à-dire celui des $\{R(j)\}_{j\in(N_{r_1}\times N_{r_2})^n}$ (resp. $\{Q(j,k)\}_{j\in(N_{r_1}\times N_{r_2})^n, k\in N_{r_1}} q(n) - n)$ qui contient x. Compte-tenu de l'hypothèse additive

$$\mu\big(Q_n(x)\big) = \mu\big(R_n(x)\big) \prod_{\alpha,\alpha'} R_{\alpha\alpha'}^{\operatorname{card}\{i\,;\; n\le i<q(n),\; x_i=\alpha \text{ et } x_{i+1}=\alpha'\}}$$

on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\mu\big(Q_n(x)\big) &= \frac{1}{n}\operatorname{Log}\mu\big(R_n(x)\big) + \\ &+ \sum_{\alpha,\alpha'} \frac{1}{n}\operatorname{card}\Big\{i\,;\; n \le i < q(n),\; x_i = \alpha \text{ et } x_{i+1} = \alpha'\Big\} \operatorname{Log} R_{\alpha\alpha'}.\end{aligned}$$

Considérons maintenant un élément x de A. On a d'une part

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\operatorname{Log}\mu\big(R_n(x)\big) = \sum_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} P_{\alpha\beta}P_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} \operatorname{Log} P_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}$$

et d'autre part

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\operatorname{card}\Big\{i\,;\; 1 \le i \le n,\; x_i = \alpha \text{ et } x_{i+1} = \alpha'\Big\} = b_\alpha R_{\alpha\alpha'}$$

d'où il résulte

$$AC\Big\{x\,;\; \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log}\mu(Q_n(x))}{\operatorname{Log}\operatorname{diam} Q_n(x)} = D\Big\}.$$