BULLETIN DE LA S. M. F.

F. PATRAS

Construction géométrique des idempotents eulériens. Filtration des groupes de polytopes et des groupes d'homologie de Hochschild

Bulletin de la S. M. F., tome 119, nº 2 (1991), p. 173-198

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_2_173_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 173–198.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES IDEMPOTENTS EULÉRIENS. FILTRATION DES GROUPES DE POLYTOPES ET DES GROUPES D'HOMOLOGIE DE HOCHSCHILD

PAR

F. PATRAS (*)

RÉSUMÉ. — Il est possible de démontrer, par des méthodes entièrement géométriques, l'existence d'une famille d'idempotents orthogonaux dans l'algèbre $\mathbb{Q}[S_n]$, ainsi que certaines propriétés remarquables de ces idempotents (comme la commutativité au bord de Hochschild abstrait). Ces résultats reposent sur l'étude de l'action des homothéties dans des groupes de polytopes.

Ils permettent de retrouver, à la manière de constructions dues à J.-L. Loday, la filtration des groupes d'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative à coefficients dans un bimodule symétrique.

ABSTRACT. — We prove, through geometrical means, the existence of a family of orthogonal idempotents in the algebra $\mathbb{Q}[S_n]$. We also esablish some properties of these idempotents (commutativity with Hochschild's abstract boundary, for example).

Applying this, and following ideas of J.-L. Loday, we construct the filtration of the Hochschild homology of a commutative algebra.

Introduction

Les travaux récents de Jean-Louis LODAY en homologie de Hochschild et en homologie cyclique [4] montrent l'importance de certaines propriétés de type combinatoire liées aux "battages de cartes" (ou "shuffles"). Lors d'une note récente [5], nous montrions comment il est possible de donner une application géométrique des calculs de [4] et de retrouver par l'intermédiaire des opérations combinatoires liées aux battages certains résultats classiques en théorie des polytopes. Le présent travail adopte le point

(*) Texte reçu le 28 juin 1990.
F. PATRAS, D.M.I., E.N.S., 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 5, France.

de vue opposé et montre entre autres comment établir, par des arguments élémentaires de géométrie simpliciale, les égalités combinatoires de [4].

L'idée fondamentale reste celle de [5] : faire opérer le n-ième groupe symétrique S_n sur les simplexes ordonnés de dimension n. Si l'on définit ces opérations sur des groupes de polytopes bien choisis, certains calculs sur l'algèbre sur les rationnels du groupe S_n peuvent s'effectuer de manière purement géométrique.

Après avoir construit un modèle géométrique : "l'anneau des simplexes", nous permettant d'interpréter les calculs liés aux opérations de battage, nous nous attacherons successivement à établir quelques égalités liées à ces opérations, puis certaines propriétés d'éléments de $\mathbb{Q}[S_n]$- les opérations d'Adams de [5], qui opèrent comme les homothéties sur l'anneau des simplexes et sont, au signe près les λ-opérations de [4]. Nous démontrons ainsi, entre autres, l'existence pour tout n d'une famille d'idempotents orthogonaux dans $\mathbb{Q}[S_n]$ permettant d'obtenir une décomposition en somme directe de tout groupe muni d'une structure de $\mathbb{Q}[S_n]$-module.

Par l'intermédiaire de raisonnements géométriques élémentaires dans une sous-catégorie CS de la catégorie des ensembles finis pointés, nous retrouvons la filtration des groupes d'homologie de Hochschild des algèbres commutatives établie dans [4]. Nous retrouvons également la décomposition du groupe des polytopes d'un espace euclidien établie dans [5].

De fait, une fois effectuée la construction de l'anneau des simplexes, ces différents résultats découlent tous des propriétés élémentaires des homothéties.

Je tiens tout particulièrement à remercier Pierre CARTIER, pour ses indications quant à la manière d'interpréter certains résultats combinatoires à l'aide de modèles simpliciaux, ainsi que pour ses nombreux conseils lors de l'élaboration de cet article.

Ce dernier est divisé en quatre parties :

I. L'anneau des simplexes $\Delta_\bullet$.
II. Décompositions et opérations sur $\Delta_\bullet$.
III. Filtration de l'anneau des simplexes.
IV. Catégorie CS et applications.

I. L'anneau des simplexes $\Delta_\bullet$

Ce paragraphe a pour fondement les idées de HADWIGER [3] : celui-ci s'intéressant à la théorie des polytopes dans des espaces affines réels à été amené à établir certaines propriétés d'un produit géométrique, le produit de Minkowski [3, I.2.2]. Ce produit s'interprète facilement en termes d'opérations de type combinatoire sur les simplexes, au travers de la notion de battage.

En fait si, plutôt que de s'intéresser comme HADWIGER à la théorie des polytopes, l'on cherche à établir de manière géométrique des propriétés de type combinatoire, il est profitable de définir ces opérations sur des groupes de polytopes à sommets dans certains sous-ensembles discrets des espaces affines réels. C'est là la motivation initiale de la construction de l'anneau des simplexes $\Delta_\bullet$, quelque intérêt qu'il puisse par ailleurs présenter en lui-même.

I.1. Définitions préalables.

I.1.a. Groupes de polytopes. — Afin d'éviter par la suite toute ambiguïté, nous commençons par rappeler les définitions suivantes.

Soient M un espace affine réel de dimension n, et G un groupe de transformations affines de cet espace. On appelle *polytope convexe* de M tout sous-ensemble de M s'écrivant comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Un polytope convexe est dit *dégénéré* (resp. *k-dégénéré*, où $k \leq n$) s'il est contenu dans un hyperplan affine de M (resp. dans un sous-espace affine de M de dimension $k-1$).

Plus généralement, on appelle *polytope* de M toute réunion finie de polytopes convexes de M. Un polytope est dit *non-dégénéré* s'il contient un polytope convexe non-dégénéré.

Définissons alors le groupe $LP(M)$ comme le $\mathbb{Q}$-module libre sur l'ensemble des polytopes de M. On appellera *groupe de polytopes associé à M* et on notera $\mathcal{P}(M)$ le groupe quotient de $LP(M)$ par le sous $\mathbb{Q}$-module engendré par les éléments $(Q - \sum_{i=1}^{n} P_i)$ de $LP(M)$, n parcourant $\mathbb{N}^*$, tels que les polytopes P_i et Q appartiennent à $LP(M)$ et satisfassent à :

i) Pour i, j distincts dans $[1, n]$, $P_i \cap P_j$ est un polytope dégénéré de M ;

ii) $\bigcup_{i \in [1,n]} P_i = Q$.

L'action de G sur M induit une action de G sur $\mathcal{P}(M)$. On appellera *groupe de polytopes associé à M et G*, et on notera $\mathcal{P}(M, G)$, le groupe $H_0(G, \mathcal{P}(M))$.

REMARQUE 1. — On rappelle que, si H est un groupe et L un $\mathbb{Z}H$-module à gauche, $H_0(H,L)$ désigne le groupe quotient de L par le sous-$\mathbb{Z}H$-module engendré par les éléments $\ell - h \cdot \ell$, où h parcourt H et ℓ parcourt L.

Si P est un polytope de M, nous noterons désormais $[P]$ sa classe dans $\mathcal{P}(M)$ (ou éventuellement dans $\mathcal{P}(M,G)$). Remarquons que si P est un polytope dégénéré, sa classe $[P]$ est nulle, compte tenu des relations i) et ii).

I.1.b. Polytopes orientés. — Nous aurons par la suite à parler de polytopes orientés. Choisissons une base ordonnée $(e_1^n, \dots, e_n^n)$ de M, et fixons sur M l'orientation définie par cette base ordonnée. Nous appellerons *polytope orienté* de M la donnée d'un polytope P et d'une orientation de l'espace. Si cette orientation coïncide avec l'orientation fixée sur M, nous dirons que P est orienté positivement ; nous dirons que P est orienté négativement dans le cas contraire.

En d'autres termes, la donnée d'un polytope orienté de M équivaut à la donnée d'un couple (P,ε), où P est un polytope et ε un élément de $\{-1,1\}$, avec la convention : $\varepsilon = 1$ si l'orientation est positive, $\varepsilon = -1$ sinon.

Considérons l'application :

$$LP(M) \times \{-1,1\} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{P}(M,G)$$
$$(P,\varepsilon) \mapsto \varepsilon \cdot [P] \ ;$$

elle permet d'associer à tout polytope orienté un élément de $\mathcal{P}(M,G)$. Par abus, si P est un polytope de M, nous appellerons l'élément $-[P]$ de $\mathcal{P}(M,G)$: *la classe dans $\mathcal{P}(M,G)$ du polytope P affecté d'une orientation négative.*

I.1.c. Simplexes. — Un k-simplexe de M est un polytope enveloppe convexe de $k+1$ points de M. Un *k-simplexe ordonné* est alors défini par la donnée d'une suite ordonnée de $k+1$ points $(x_0, \dots, x_k)$ ou, de manière équivalente, par la donnée d'un point et d'une suite ordonnée de k vecteurs — qui représentent les arêtes successives du k-simplexe : $(x_0 / \overline{x_0x_1} / \cdots / \overline{x_{k-1}x_k})$.

Le *k-simplexe sous-jacent* à un k-simplexe ordonné est, par définition l'enveloppe convexe des $(k+1)$ points qui définissent ce simplexe.

Soit maintenant $(x_0, \dots, x_n)$ un n-simplexe ordonné non-dégénéré ; la suite de vecteurs $(\overline{x_0x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}x_n})$ définit une orientation de M ; tout n-simplexe ordonné peut donc être considéré comme un simplexe orienté.