BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL BRION
JACQUES DIXMIER

Comportement asymptotique des dimensions des covariants

Bulletin de la S. M. F., tome 119, nº 2 (1991), p. 217-230
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_2_217_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 217–230.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES DIMENSIONS DES COVARIANTS

PAR

MICHEL BRION ET JACQUES DIXMIER (*)

RÉSUMÉ. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et soit $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ une k-algèbre graduée intègre de type fini, avec $A_0 = k \cdot 1$ et $A_n \neq 0$ pour n assez grand. Soient G un groupe réductif sur k, e son élément neutre, Λ l'ensemble des classes de représentations rationnelles simples de dimension finie de G, 0 l'élément trivial de dimension 1 de Λ. On suppose que G opère fidèlement rationnellement dans A par automorphismes gradués. Pour $\lambda \in \Lambda$, soit $m_{\lambda,n}$ la multiplicité de λ dans A_n. Soit X la variété affine irréductible sur k définie par A. Le groupe G opère dans X. Pour simplifier ce résumé, supposons que $m_{0,n} \neq 0$ pour n assez grand, que l'orbite générique de G dans X soit fermée et que le stabilisateur générique d'un point de X soit trivial. Alors $m_{\lambda,n}/m_{0,n} \to \dim\lambda$ quand $n \to \infty$. Cela généralise un résultat de R. Howe, relatif au cas où G est fini. Supposons que G soit la complexification d'un groupe de Lie compact connexe K. Soit ψ_n le caractère, convenablement normalisé, de K opérant dans A_n. Alors $\psi_n \to \varepsilon_e$ (masse de Dirac en e) au sens des distributions quand $n \to \infty$.

ABSTRACT. — Let k be an algebraically closed field, of characteristic 0, $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ a graded k-algebra which is finitely generated and a domain, with $A_0 = k \cdot 1$ and $A_n \neq 0$ for n big enough. Let G be a reductive group over k, e its unit element, Λ the set of classes of finite dimensional rational simple representations of G, 0 the trivial element of dimension 1 of Λ. Assume that G operates faithfully and rationally in A by graded automorphisms. For $\lambda \in \Lambda$, let $m_{\lambda,n}$ be the multiplicity of λ in A_n. Let X be the affine irreducible variety over k defined by A. The group G operates in X. To simplify this abstract, assume that $m_{0,n} \neq 0$ for n big enough, that the generic orbit of G in X is closed, and that the stabilizer of a generic point of X is trivial. Then $m_{\lambda,n}/m_{0,n} \to \dim\lambda$ as $n \to \infty$. This generalizes a result by R. Howe, which concerns the case where G is finite. Assume that G is the complexification of a connected compact Lie group K. Let ψ_n be the character of the representation of K in A_n, with a suitable normalization. Then, as $n \to \infty$, $\psi_n \to \varepsilon_e$ (Dirac mass at e) in the space of distributions on K.

(*) Texte reçu le 27 décembre 1990, révisé le 14 mars 1991.
M. BRION, Institut Fourier, Grenoble et J. DIXMIER, Paris, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1991/217/\$ 5.00

1. Introduction

1.1. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Soit $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ une k-algèbre graduée de type fini, intègre, avec $A_0 = k \cdot 1$, $A \neq A_0$. Par un changement de graduation, on peut supposer que $\operatorname{pgcd} \{n \mid A_n \neq 0\} = 1$; alors $A_n \neq 0$ pour n assez grand. Nous nous placerons désormais dans cette situation.

1.2. — Soit G un groupe fini qui opère fidèlement dans A par automorphismes, en laissant stable chaque A_n. Soit ρ_n la représentation de G dans A_n ainsi définie. Dans [3], R. HOWE a étudié la structure de ρ_n pour n grand. Pour éviter, dans cette introduction, des complications techniques, supposons que le centre de G soit trivial. Alors, *quand $n \to \infty$, ρ_n tend vers un multiple de la représentation régulière de G* (cf. [3], p. 378, corollary pour un énoncé précis et plus général).

Nous allons étendre le résultat de R. HOWE au cas où G est réductif.

2. Le résultat principal

2.1. — Pour les notions et les propositions générales de 2.1 et 2.2, on renvoie à [4] et [6]. Les notations k, A, A_n sont celles de 1.1. On pose :

$$\sum_{p \leq n} A_p = A_{\leq n}.$$

Soit G un groupe réductif sur k, d'élément neutre e. On note Λ l'ensemble des classes de représentations simples rationnelles de dimension finie de G. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on note $d(\lambda)$ la dimension de λ. Soit 0 la classe de la représentation triviale de dimension 1 de G. On suppose que G opère fidèlement dans A par automorphismes gradués, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la représentation ρ_n de G dans A_n est rationnelle. Pour $\lambda \in \Lambda$, soit $m_{\lambda,n}$ (resp. $m_{\lambda,\leq n}$) la multiplicité de λ dans A_n (resp. $A_{\leq n}$), et soit $A(\lambda)$ la composante isotypique de type λ de A. On a $\dim A(\lambda)_n = m_{\lambda,n} d(\lambda)$.

Soit X la variété affine irréductible sur k définie par A. Le groupe G opère régulièrement dans X (autrement dit, l'application naturelle $G \times X \to X$ est un morphisme au sens de la géométrie algébrique). On considère la condition suivante :

(*) L'orbite générique de G dans X est fermée.

Soit H le stabilisateur dans G d'un point générique de X. Supposons (*) vérifiée. Alors H est réductif. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on note p_λ la multiplicité de λ dans l'algèbre $k[G/H]$ des fonctions régulières sur G/H (G opère dans G/H par la représentation régulière). Par réciprocité de Frobenius, p_λ est la dimension de l'espace des vecteurs H-invariants dans l'espace de λ. On considère aussi la condition suivante :

(**) L'orbite générique de G dans X est fermée et $H = \{e\}$.

Si G est fini, la condition (**) est vérifiée.

2.2. — On notera B l'algèbre A^G des éléments G-invariants de A, et d sa dimension de Krull. Soit $B_n = B \cap A_n$. Supposons (*) vérifiée et montrons que $B \neq B_0$.

Supposons $B = B_0$. Comme les éléments de B séparent les orbites fermées de X, la condition (*) entraîne que X se réduit à une orbite. La structure graduée G-invariante de A entraîne l'existence d'un point fixe de G dans X, que nous noterons ω. Donc $X = \{\omega\}$, d'où $A = A_0$, cas exclu. Cela prouve notre assertion.

Soit S l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $B_n \neq 0$. Alors S est un sous-semi-groupe de $\mathbb{N}$ pour l'addition, non réduit à $\{0\}$. *Soit n_0 le* pgcd *des éléments non nuls de S.* Alors S contient tous les multiples assez grands de n_0. Il existe une constante $c > 0$ telle que $\dim B_n \sim cn^{d-1}$ pour $n \in n_0\mathbb{N}$, $n \to \infty$ (cf. par exemple [3], p. 377). Evidemment, $\dim B_n = 0$ pour $n \notin n_0\mathbb{N}$. Si l'on pose $m'_{0,n} = \sum_{p=n}^{n+n_0-1} m_{0,n}$, on a donc

$$m'_{0,n} \sim cn^{d-1} \quad \text{quand} \quad n \to \infty \ .$$

Les notations de 2.1 et 2.2 seront employées dans tout l'article.

LEMME 2.3. — *Soient k, A, G comme en* 2.1, *vérifiant* (*). *Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a*

$$m_{\lambda, \leq n}/m_{0, \leq n} \longrightarrow p_\lambda \quad \textit{quand} \quad n \to \infty \ .$$

a) Le B-module $A(\lambda)$ est de type fini, et sans torsion. Montrons que :

(1) Le rang du B-module $A(\lambda)$ est égal à $p_\lambda d(\lambda)$.

Soit $\pi : X \to Y$ le quotient par G. Montrons qu'il existe un ouvert non vide Y_0 de Y tel que pour tout $y \in Y_0$, le rang du B-module $A(\lambda)$ est la dimension de $k[\pi^{-1}(y)](\lambda)$ (la composante isotypique de type λ dans l'algèbre des fonctions régulières sur $\pi^{-1}(y)$). L'assertion (1) en résulte, car $\pi^{-1}(y) \simeq G/H$ pour tout y dans un ouvert non vide de Y_0.

Soient $f_1, \ldots, f_r$ dans $A(\lambda)$, linéairement indépendants sur B, avec $r = \mathrm{rg}_B A(\lambda)$; on note M le B-sous-module de $A(\lambda)$ qu'ils engendrent. Il existe $f \in B \setminus \{0\}$ tel que $fA(\lambda) \subset M$. Montrons que

$$Y_0 = \{y \in Y \mid f(y) \neq 0\}$$

convient.

Choisissons $y \in Y_0$, et notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de B défini par y. Alors $k[\pi^{-1}(y)](\lambda) = A(\lambda)/\mathfrak{m}A(\lambda)$. Pour tout $u \in A(\lambda)$, notons $\bar{u}$ son image dans $\overline{A(\lambda)} = A(\lambda)/\mathfrak{m}A(\lambda)$. Les éléments $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_r$ sont linéairement indépendants dans $\overline{A(\lambda)}$; sinon, il existe $b_1, \ldots, b_r$ dans B tels que $\sum_{i=1}^r b_i f_i \in \mathfrak{m}A(\lambda)$ et que (par exemple) $b_1 \notin \mathfrak{m}$. Alors

$$f \cdot \sum_{i=1}^{r} b_i f_i \in f\mathfrak{m}A(\lambda) \subset \mathfrak{m}M,$$

donc $fb_1 \in \mathfrak{m}$, contradiction. Par suite $\dim \overline{M} = r$. Puisque $fA(\lambda) \subset M \subset A(\lambda)$ et que $\overline{fA(\lambda)} = \overline{A(\lambda)}$, on conclut que $\dim \overline{A(\lambda)} = r$.

b) Choisissons $f_1, f_2, \ldots, f_{p_\lambda d(\lambda)} \in A(\lambda)$, homogènes, linéairement indépendants sur B. Soit M le sous-B-module de $A(\lambda)$ engendré par les f_i. Puisque le B-module $A(\lambda)/M$ est de torsion, sa dimension de Krull est au plus $(d-1)$, d'où $\dim M_{\leq n} \sim \dim A(\lambda)_{\leq n}$ quand $n \to \infty$. De plus,

$$\dim M_{\leq n} = \sum_{i=1}^{p_\lambda d(\lambda)} \sum_{m=0}^{n} \dim B_{m-q_i}$$

où $q_i = \deg f_i$. On en déduit que, quand $n \to \infty$,

$$m_{\lambda, \leq n} = \frac{1}{d(\lambda)} \dim A(\lambda)_{\leq n} \sim p_\lambda \dim B_{\leq n}.$$

LEMME 2.4. — *Soient k, A, G comme en 2.1, vérifiant (*). Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $m'_{\lambda,n} = \sum_{p=n}^{n+n_0-1} m_{\lambda,n}$ la multiplicité de λ dans $\sum_{p=n}^{n+n_0-1} A_p$. Alors $m'_{\lambda,n}/m'_{0,n} \to p_\lambda$ quand $n \to \infty$.*

Rappelons (2.2) l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$m'_{0,n} \sim cn^{d-1} \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2}$$