Bulletin de la S. M. F.

Olivier Biquard

Fibrés paraboliques stables et connexions singulières plates

Bulletin de la S. M. F., tome 119, nº 2 (1991), p. 231-257
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_2_231_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 231–257.

FIBRÉS PARABOLIQUES STABLES ET CONNEXIONS SINGULIÈRES PLATES

PAR

OLIVIER BIQUARD (*)

RÉSUMÉ. — Soit E un fibré holomorphe sur une surface de Riemann X, avec structure parabolique au-dessus des points $P_i \in X$; on construit des espaces de connexions sur E, singulières aux points P_i, qui sont "adaptées" à la structure parabolique ; on utilise la méthode de Donaldson pour donner une démonstration par la géométrie différentielle d'un théorème de Mehta et Seshadri sur les fibrés paraboliques stables.

ABSTRACT. — Let X be a Riemann surface, $E \to X$ a holomorphic vector bundle with parabolic structure over the points $P_i \in X$; we construct spaces of connections on E, singular at the points P_i, which "represent" the parabolic structure ; we then use Donaldson's method to give a differential-geometric proof of a theorem of Mehta and Seshadri about stable parabolic vector bundles.

0. Introduction

En 1965, NARASIMHAN et SESHADRI [8] ont montré que tout fibré stable sur une surface de Riemann provient d'une représentation unitaire projective irréductible du groupe fondamental. DONALDSON, inspiré par [1], a montré dans [2] le résultat équivalent de géométrie différentielle, à savoir que tout fibré holomorphe hermitien stable sur une surface de Riemann admet une connexion unitaire à courbure centrale constante. La généralisation convenable de ce résultat sur une variété kählérienne compacte quelconque (existence d'une métrique d'Hermite-Einstein sur un fibré stable) a été démontrée par DONALDSON [3], [4] dans le cas projectif, UHLENBECK et YAU [13] dans le cas général. SIMPSON [10] a étendu ce résultat, d'une part à certaines variétés non compactes, en particulier les ouverts de Zariski d'une variété compacte, et d'autre part aux fibrés de Higgs introduits par HITCHIN [5] dans le cas des courbes. La méthode utilisée

(*) Texte reçu le 15 mars 1990, révisé le 27 mars 1991.
O. BIQUARD, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 91128 Palaiseau Cedex.

par DONALDSON (et HITCHIN) en dimension 1, directement inspirée de la théorie de Yang-Mills, est plus simple que celle utilisée en dimension supérieure.

Le but de ce papier est de l'appliquer à la démonstration d'un théorème de MEHTA et SESHADRI [7], qui généralise le théorème de Narasimhan et Seshadri à un modèle de fibrés sur une courbe non compacte, les fibrés munis d'une *structure parabolique*. Cette méthode, plus simple donc, mais moins générale que celle de SIMPSON [11], a l'intérêt de fournir le cadre fonctionnel adéquat : à une structure parabolique sont associés de "bons" espaces de *connexions singulières* dans lesquels on peut appliquer les méthodes de la géométrie différentielle (moyennant une analyse un peu plus compliquée). En particulier, on peut obtenir dans ces espaces un théorème de compacité.

Dans une première partie, nous étudions le modèle local qui servira de base de travail. Après avoir donné les propriétés des espaces de Sobolev à poids dans la section 1.1, nous pouvons définir les espaces fonctionnels adéquats dans la section 1.2 pour terminer dans la section 1.3 par une théorie de jauge locale avec singularité et la démonstration dans notre cadre d'un "théorème local de compacité" (THÉORÈME 1.5) analogue à celui d'Uhlenbeck.

Dans la seconde partie, nous introduisons (section 2.1) les fibrés muni d'une structure parabolique et les outils pour les traiter, ce qui permet d'énoncer le théorème principal de ce papier (THÉORÈME 2.5). La section 2.2 comprend le problème de l'extension pour les fibrés paraboliques du point de vue différentiel, ce qui est un pas important en vue de la démonstration du théorème principal dans la section 2.3. Cette démonstration est inspirée, comme on l'aura compris, de celle de DONALDSON dans [2].

Remerciements. — Je tiens ici à remercier J.-P. BOURGUIGNON et P. PANSU pour leur aide et leurs encouragements.

1. Théorie de jauge dans $\mathbb{B}^n$, singulière en 0

1.1. Théorie de Sobolev à poids dans $\mathbb{B}^n$.

Soit $\mathbb{B}^n$ la boule unité ouverte dans $\mathbb{R}^n$, munie de la métrique usuelle $|\mathrm{d}x|^n$. Soient k un entier positif, $p \in [1, +\infty[$, $\delta \in \mathbb{R}$, f une fonction dans $\mathbb{B}^n - \{0\}$, on définit les normes (en notant $r = |x|$)

$$\|f\|_{W^p_{k\,;\,\delta}} = \Big(\sum_{i=0}^{k} \|r^{i-\delta-\frac{n}{p}}\nabla^i f\|^p_{L^p}\Big)^{1/p}$$
$$= \Big(\sum_{i=0}^{k} \int |r^{i-\delta}\nabla^i f|^p \frac{|\mathrm{d}x|^n}{r^n}\Big)^{1/p},$$
$$\|f\|_{W^\infty_{k\,;\,\delta}} = \sum_{i=0}^{k} \|r^{i-\delta}\nabla^i f\|_\infty,$$

et les espaces

$$W^p_{k\,;\,\delta} = \big\{f \in L^p_{k\,;\,\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n - \{0\})\ ;\ \|f\|_{W^p_{k\,;\,\delta}} < \infty\big\}.$$

En posant $t = -\ln(r)$, on peut considérer la boule $\mathbb{B}^n - \{0\}$ comme le cylindre $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, +\infty[$: l'espace $W^p_{k\,;\,\delta}$ que nous avons défini est alors égal à l'espace

$$W^p_{k\,;\,\delta} = \big\{f\ ;\ \mathrm{e}^{\delta t} f \in L^p_k(\text{cylindre})\big\}$$

utilisé par LOCKART et MCOWEN dans [6].

En notant $s = n/p - k$, on a les injections de Sobolev suivantes [6, lemme 7.2].

THÉORÈME 1.1. — *Supposons $k_1 \geq k_2$, $s_1 \leq s_2$ et $\delta_2 < \delta_1$ (ou bien $\delta_2 = \delta_1$ et $p_2 \geq p_1$), alors on a une injection continue $W^{p_1}_{k_1\,;\,\delta_1} \subset W^{p_2}_{k_2\,;\,\delta_2}$.*

Remarque. — On peut montrer de plus que si $k_1 > k_2$, $s_1 < s_2$ et $\delta_2 < \delta_1$, alors l'injection est compacte. D'autre part, le théorème est encore valable pour $p_2 = \infty$: on peut obtenir que si $k > n/p$ et $f \in W^p_{k\,;\,\delta}$, alors la fonction $r^{-\delta} f$ est continue dans $\mathbb{B}^n$ et tend vers 0 quand x tend vers 0.

THÉORÈME 1.2. — *Supposons $\delta > 0$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in W^p_{1\,;\,\delta}$, on ait*

$$\|u\|_{W^p_{1\,;\,\delta}} \leq c\,\|\mathrm{d}u\|_{W^p_{0\,;\,\delta-1}}.$$

Démonstration. — On a toujours, pour toute fonction $u \in C^\infty$,

$$(*)\qquad (\alpha - n)\int_{|x|\leq 1} \frac{|u|^p}{r^\alpha} = \int_{|x|\leq 1} \frac{\mathrm{d}|u|^p \wedge *\mathrm{d}r}{r^{\alpha-1}} - \int_{|x|=1} |u|^p * \mathrm{d}r + \int_{|x|=\varepsilon} \frac{|u|^p * \mathrm{d}r}{r^{\alpha-1}}.$$

Supposons u nulle au voisinage de 0 et $\alpha > n$, on en déduit

$$(\alpha - n)\int_{|x|\le 1}\frac{|u|^p}{r^\alpha} \le \int_{|x|\le 1}\frac{|u|^{p-1}|\mathrm{d}u|}{r^{\alpha-1}} \le \Big(\int_{|x|\le 1}\frac{|u|^p}{r^\alpha}\Big)^{(p-1)/p}\Big(\int_{|x|\le 1}\frac{|\mathrm{d}u|^p}{r^{\alpha-p}}\Big)^{1/p},$$

d'où finalement,

$$\int |u|^p\frac{|\mathrm{d}x|^n}{r^\alpha} \le c\int |\mathrm{d}u|^p\frac{|\mathrm{d}x|^n}{r^{\alpha-p}},$$

ce qui donne le résultat souhaité en posant $\alpha = n + p\delta$. ☐

Nous serons particulièrement intéressés par l'espace $W_k^p = W_{k\,;\,k-n/p}^p$, dont la norme est

$$\|f\|_{W_k^p} = \Big(\int |\nabla^k f|^p + \Big|\frac{\nabla^{k-1}f}{r}\Big|^p + \cdots + \Big|\frac{f}{r^k}\Big|^p\Big)^{1/p}.$$

Il est clair que $W_k^p \subset L_k^p$. En fait, on peut en général (pour les valeurs non critiques de p) préciser simplement l'image exacte dans L_k^p.

THÉORÈME 1.3. — *Soit ℓ un entier positif ou nul; si $\ell-1 < k-n/p < \ell$, alors on a*

$$W_k^p = \{f \in L_k^p\ ;\ f(0) = 0, \ldots, \nabla^{\ell-1}f(0) = 0\},$$

et les normes W_k^p et L_k^p sont équivalentes dans W_k^p.

Démonstration. — Soit $u \in C^\infty(\mathbb{B}^n)$, $\tau = \tau(r)$ une fonction test C^∞, nulle au voisinage de $r = 1$ et valant 1 au voisinage de 0. Appliquons alors l'égalité (*) à la fonction τu en supposant $\alpha < n$; on va obtenir, par la même méthode que dans la proposition précédente,

$$\int_{|x|\le 1}\frac{|\tau u|^p}{r^\alpha} \le c\int_{|x|\le 1}\frac{|\mathrm{d}(\tau u)|^p}{r^{\alpha-p}},$$

d'où l'on déduit $\displaystyle\int_{|x|\le 1}\frac{|u|^p}{r^\alpha} \le c'\int_{|x|\le 1}\Big(\frac{|\mathrm{d}u|^p}{r^{\alpha-p}} + \frac{|u|^p}{r^{\alpha-p}}\Big)$.

- Supposons $\ell = 0$. On obtient, puisque $n - p < kp < n$,

$$\|\nabla^{k-1}u/r\|_{L^p}^p \le c_1\big(\|\nabla^k u\|_{L^p}^p + \|\nabla^{k-1}u\|_{L^p}^p\big)\ ;$$

$$\begin{aligned}\|\nabla^{k-2}u/r^2\|_{L^p}^p &\le c_2\big(\|\nabla^{k-1}u/r\|_{L^p}^p + \|\nabla^{k-2}u/r\|_{L^p}^p\big)\\ &\le c_2c_1\big(\|\nabla^k u\|_{L^p}^p + 2\|\nabla^{k-1}u\|_{L^p}^p + \|\nabla^k u\|_{L^p}^p\big)\end{aligned}$$

etc., et finalement $\|u\|_{W_k^p} \le C\|u\|_{L_k^p}$ pour $u \in C^\infty(\mathbb{B}^n)$. D'où $W_k^p = L_k^p$.