BULLETIN DE LA S. M. F.

G. LAUMON

Fibrés vectoriels spéciaux

Bulletin de la S. M. F., tome 119, nº 1 (1991), p. 97-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_1_97_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 97–119.

FIBRÉS VECTORIELS SPÉCIAUX

PAR

G. LAUMON (*)

RÉSUMÉ. — On définit et on étudie un analogue de l'application d'Abel-Jacobi pour les fibrés vectoriels de rang n sur une surface de Riemann compacte. En particulier on calcule l'image directe du faisceau constant $\mathbb{C}$ par cette application d'Abel-Jacobi généralisée.

ABSTRACT. — We define and study an analog of the Abel-Jacobi morphism for rank n vector bundles on a compact Riemann surface. In particular, we compute the direct image of the constant sheaf $\mathbb{C}$ by this generalized Abel-Jacobi morphism.

0. Introduction

Soient X une courbe projective, lisse et connexe de genre g sur $\mathbb{C}$ et n un entier ≥ 1.

DÉFINITION 0.1. — *Un fibré vectoriel $\mathcal{L}$ de rang n sur X sera dit* spécial *si $H^0(X,\mathcal{L})$ et $H^1(X,\mathcal{L})$ sont tous deux non nuls.*

L'étude des fibrés vectoriels spéciaux de rang 1 a fait l'objet de très nombreux travaux (*cf.* [A-C-G-H] pour une présentation condensée de ceux-ci et pour une bibliographie). On propose dans cette note d'étendre une partie de cette étude aux fibrés de rang arbitraire.

On définit au numéro 1 un analogue de l'application d'Abel-Jacobi pour les fibrés de rang n. On montre en particulier que l'espace de modules des fibrés spéciaux de rang n est un fermé de codimension ≥ 1 de l'espace de modules de tous les fibrés de rang n.

Au numéro 2, on étudie du point de vue différentiel des analogues des variétés des séries linéaires spéciales.

(*) Texte reçu le 30 avril 1990.
G. LAUMON, Université Paris-Sud, URA D0752 du CNRS, Dépt. de Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

Au numéro 3, on démontre des inégalités du type Martens et Clifford pour les fibrés de rang n. On en déduit une expression pour l'image directe du faisceau constant $\mathbb{C}$ par l'application d'Abel-Jacobi généralisée.

Au numéro 4, on généralise la notion de diviseur théta.

Enfin, au numéro 5, on démontre l'irréductibilité des espaces de modules des fibrés spéciaux.

La plupart des démonstrations sont inspirées directement de celles pour les diviseurs, aussi les détails sont en général laissés au lecteur. On laisse aussi le soin au lecteur intéressé d'étendre au cas des fibrés de rang n le théorème de Riemann pour les singularités du diviseur théta et sa généralisation par Kempf; cela ne semble poser aucun problème.

Je remercie l'IHES pour son hospitalité durant la préparation de ce travail.

1. Application d'Abel-Jacobi pour les fibrés vectoriels de rang n

La courbe X et l'entier n sont fixés comme dans l'introduction. Pour tout entier ℓ, on note

$$\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n} = \mathrm{Fib}^{\ell}$$

le champ algébrique sur $\mathbb{C}$ des fibrés vectoriels de rang n et de degré ℓ sur X. C'est un champ connexe et lisse de dimension $n^2(g-1)$.

Sur $X \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}$, on dispose d'un fibré vectoriel de rang n universel que l'on notera

$$\mathcal{U}^{\ell}_{X,n} = \mathcal{U}^{\ell}$$

et on pose

$$\mathcal{F}^{\ell}_{X,n} = \mathcal{F}^{\ell} = \mathbb{R}^1 \mathrm{pr}_{2*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Fib}^{\ell}}}(\mathcal{U}^{\ell}, \mathrm{pr}_1^* \Omega^1_X) \tag{1.1}$$

où $\mathrm{pr}_1 : X \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Fib}^{\ell} \to X$ et $\mathrm{pr}_2 : X \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Fib}^{\ell} \to \mathrm{Fib}^{\ell}$ sont les deux projections canoniques. $\mathcal{F}^{\ell}$ est un Module cohérent sur Fib^{ℓ} et pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Fib}^{\ell}(\mathbb{C})$, on a

$$\mathcal{F}^{\ell}_{(\mathcal{L})} = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \Omega^1_X) = H^0(X, \mathcal{L})^* \tag{1.2}$$

d'après le théorème de changement de base et la dualité de Serre.

DÉFINITION 1.3. — *On appelle application d'Abel-Jacobi en degré ℓ (pour les fibrés vectoriels de rang n sur X) et on note*

$$\pi^{\ell}_{X,n} : \widetilde{W}^{\ell}_{X,n} \longrightarrow \mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}$$

(ou plus simplement $\pi^{\ell} : \widetilde{W}^{\ell} \to \mathrm{Fib}^{\ell}$) le fibré projectif au sens de Grothendieck associé au module cohérent $\mathcal{F}^{\ell}_{X,n}$ sur $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}$.

Il résulte aussitôt de (1.2) que pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}(\mathbb{C})$, la fibre de $\pi^{\ell}_{X,n}$ en $\mathcal{L}$ s'identifie canoniquement à l'espace projectif des droites dans l'espace vectoriel

$$H^0(X,\mathcal{L}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},\Omega^1_X)^*$$

(dualité de Serre).

THÉORÈME 1.4. — *Le champ algébrique $\widetilde{W}^{\ell}_{X,n}$ est lisse de dimension $\ell + n(n-1)(g-1) - 1$ sur $\mathbb{C}$.*

Preuve. — Notons $\dot{\widetilde{W}}^{\ell} \xrightarrow{\dot{\pi}^{\ell}} \mathrm{Fib}^{\ell}$ le complément de la section nulle dans le fibré vectoriel au sens de Grothendieck associé à $\mathcal{F}^{\ell}$. On a

$$\widetilde{W}^{\ell} = \dot{\widetilde{W}}^{\ell}/\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$$

et il suffit donc de montrer que $\dot{\widetilde{W}}^{\ell}$ est lisse de dimension $\ell+n(n-1)(g-1)$ sur $\mathbb{C}$.

Prouvons d'abord la lissité de $\dot{\widetilde{W}}^{\ell}$. Soient donc R une $\mathbb{C}$-algèbre, $I \subset R$ un idéal de carré nul, $R_0 = R/I$ et $\mathcal{L}_0$ un fibré vectoriel de rang n sur $X \otimes_{\mathbb{C}} R_0$ muni d'une section σ_0 non identiquement nulle dans chaque fibre de la projection canonique $X \otimes_{\mathbb{C}} R_0 \to \mathrm{Spec}(R_0)$. Il faut montrer que le couple $(\mathcal{L}_0, \sigma_0)$ se relève à $X \otimes_{\mathbb{C}} R$. Il n'y a pas d'obstruction à relever $\mathcal{L}_0$: choisissons arbitrairement un relèvement $\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}_0$ à $X \otimes_{\mathbb{C}} R$. En général, σ_0 ne se relève pas en une section de $\mathcal{L}$ (le morphisme $\pi^{\ell}_{X,n}$ n'est pas lisse en général) : il y a une obstruction θ dans $H^1(X \otimes_{\mathbb{C}} R_0, \mathcal{L}_0) \otimes_{R_0} I$. Pour lever cette obstruction, il suffit de modifier $\mathcal{L}$ par un élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}R_0}}(\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_0) \otimes_{R_0} I$ d'image θ par l'application

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}R_0}}(\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_0) \otimes_{R_0} I \longrightarrow H^1\big(X \otimes_{\mathbb{C}} R_0, \mathcal{L}_0\big) \otimes_{R_0} I$$

induite par σ_0 (les relèvements de $\mathcal{L}_0$ à $X\otimes_{\mathbb{C}}R$ forment un espace principal homogène sous $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}R_0}}(\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_0)\otimes_{R_0}I$). Or l'application

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}R_0}}(\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_0)\longrightarrow H^1\big(X\otimes_{\mathbb{C}}R_0,\mathcal{L}_0\big)$$

induite par σ_0 est clairement surjective, d'où la lissité cherchée.

Calculons maintenant la dimension en un point complexe $(\mathcal{L},\sigma)$ de $\dot{\widetilde{W}}{}^{\ell}$. On a le triangle distingué

$$\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X\big)\to\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{L},(\mathcal{L}/\mathcal{O}_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X\big)\\ \longrightarrow\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},\Omega^1_X)[1]\to$$

associé à la suite exacte courte

$$\big(0\longrightarrow\mathcal{O}_X\xrightarrow{\sigma}\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}/\mathcal{O}_X\longrightarrow 0\big)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X$$

et il est clair d'après ce qui précède que ce triangle s'identifie à la fibre en $(\mathcal{L},\sigma)$ du triangle distingué

$$\mathbb{L}(\dot{\pi}^{\ell})^*L_{\mathrm{Fib}^{\ell}/\mathbb{C}}\longrightarrow L_{\dot{\widetilde{W}}{}^{\ell}/\mathbb{C}}\longrightarrow L_{\dot{\widetilde{W}}{}^{\ell}/\,\mathrm{Fib}^{\ell}}\longrightarrow$$

de la théorie du complexe cotangent (*cf.* [Il], II (2.1.5.6)). Par suite, la dimension en $(\mathcal{L},\sigma)$ de $\dot{\widetilde{W}}{}^{\ell}$ est égale à

$$\chi\big(\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},(\mathcal{L}/\mathcal{O}_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X)\big)=\ell+n(n-1)(g-1),$$

d'où la conclusion.

Pour tout entier $\ell\leq n(g-1)$, on notera

$$W^{\ell}_{X,n}=W^{\ell}\tag{1.5}$$

le fermé réduit de Fib^{ℓ} image du morphisme projectif

$$\pi^{\ell}_{X,n}:\widetilde{W}^{\ell}_{X,n}\longrightarrow\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}\,.$$

PROPOSITION 1.6. — *Pour tout entier $\ell\leq n(g-1)$, le morphisme*

$$\pi^{\ell}_{X,n}:\widetilde{W}^{\ell}_{X,n}\longrightarrow W_{X,n}$$