BULLETIN DE LA S. M. F.

HA HUY KHOAI

Sur les séries L associées aux formes modulaires

Bulletin de la S. M. F., tome 120, nº 1 (1992), p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_1_1_0>

Bull. Soc. math. France,
120, 1992, p. 1–13.

SUR LES SÉRIES L ASSOCIÉES AUX FORMES MODULAIRES

PAR

HA HUY KHOAI (*)

RÉSUMÉ. — Nous démontrons quelques théorèmes de type de Weil sur les caractérisations des séries L associées aux formes modulaires et donnons une borne supérieure d'une constante dans la formule de Manin des valeurs propres des opérateurs de Hecke.

ABSTRACT. — We prowe some theorems of the Weil type on characterization of L-series associated to modular forms and give a supper bound of a constant in the Manin's formula of eigenvalues of Hecke operators.

0. Introduction

Dans [11] A. WEIL montre les conditions caractérisant les séries L associées aux formes modulaires relativement au groupe $\Gamma_0(N)$. Une des hypothèses de Weil est que l'équation fonctionnelle satisfaite par les séries L soit valable pour un ensemble infini de caractères. Dans la suite, de nombreux articles (voir [1], [2], [3], [4], [5], [9], [12], [13], [14]) considèrent le problème analogue dans les cas plus généraux, par exemple, les formes automorphes. Dans ces articles, le nombre des équations fonctionnelles qui doivent être satisfaites s'avère également infini.

Dans le présent article nous nous intéressons aux mêmes objets comme dans [11], et démontrons quelques théorèmes de type de Weil où le nombre des équations fonctionnelles est fini.

Dans la deuxième partie nous donnons une borne supérieure pour la constante de la formule de Manin pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke.

(*) Texte reçu le 19 novembre 1989, révisé le 13 mai 1991.
H.H. KHOAI, Institut of mathematics, Box 631 Bo Ho, Hanoi, Vietnam.
ICTP, Mathematics Section, Box 586, 34100 Trieste, Italy.
Classification AMS : 11F66, 11F30, 11F03, 11F11.

1. Théorèmes de type de Weil pour les séries L associées aux formes modulaires

Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite des nombres complexes, $a_n = \mathrm{O}(n^{-\sigma})$ avec $\sigma > 0$, et soit χ un caractère de Dirichlet modulo m. On pose :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n z}, \qquad L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, n^{-s},$$

$$\Lambda(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s), \quad f_\chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) \, \mathrm{e}^{2\pi i n z},$$

$$L_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) \, n^{-s}, \quad \Lambda_\chi(s) = \Big(\frac{2\pi}{m}\Big)^{-s}\Gamma(s)L_\chi(s).$$

Soient $C \neq 0$, $A > 0$, $k > 0$. Rappelons ici les conditions de Hecke-Weil :

a) $\Lambda(s) + N^{-s/2}\Big(\dfrac{a_0}{s} + \dfrac{Ca_0}{k-s}\Big)$ est holomorphe et bornée sur les bandes verticales (HBV) et

$$\Lambda(s) = CN^{k/2-s}\Lambda(k-s)\,;$$

b) $\Lambda_\chi(s)$ est HBV et

$$\Lambda_\chi(s) = C_\chi N^{k/2-s}\Lambda_\chi(k-s)$$

où C_χ est une constante $\neq 0$.

D'après le théorème de Hecke la condition a), où $N = 1$, est équivalente à ce que la fonction $f(z)$ soit une forme modulaire de poids k relativement au groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. A. WEIL montre que les conditions a) et b) caractérisent les séries L associées aux formes modulaires relativement au groupe $\Gamma_0(N)$. Une des hypothèses du théorème de Weil (voir [11]) est que la condition b) soit valable pour un ensemble infini des caractères χ. Nous donnons ici la démonstration de théorème de même type, où on demande la condition b) pour un ensemble fini des caractères χ.

THÉORÈME 1.1. — *Soient ε un caractère de Dirichlet modulo N et $C = \pm 1$. Supposons que la condition a) est satisfaite et que la condition b) est satisfaite pour les caractères χ de conducteurs m tels que $(m, N) = 1$ et $m < N^2$, $C_\chi = C\varepsilon(m)G(\chi)/G(\overline{\chi})$. Alors $f(z)$ est une forme modulaire de poids k relativement au groupe $\Gamma_0(N)$ et au caractère ε.*

Démonstration. — En outre pour les conditions a) et b) nous considérons la condition suivante :

c) $f = Ci^k f_{|k}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$, où pour chaque matrice $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ on pose :

$$f_{|k}\alpha(z) = (\det \alpha)^{k/2}(cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big).$$

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ satisfasse les conditions a) et b) pour tout caractère χ modulo m tel que $(m, N) = 1$ et $m < N^2$. Comme $f(z)$ satisfait la condition a), elle satisfait aussi la condition c) (cf. [8, chap. 5]). Montrons que pour toute matrice

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

on a :

$$f_{|k}\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} = \varepsilon(d) f.$$

Si $b = 0$, alors $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Nc & 1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Nc & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/N \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= H_N \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_N^{-1}, \end{aligned}$$

où $H_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} f_{|k}\gamma = f_{|k}\Big\{ H_N \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_N^{-1} \Big\} &= C^{-1} i^{-k} f_{|k}\begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_N^{-1} \\ &= C^{-1} i^{-k} f_{|k} H_N^{-1} = f. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $b \neq 0$. Dans ce cas la démonstration utilise une série de lemmes.

LEMME 1.2. — *Soit* $\gamma = \begin{pmatrix} n & -b \\ -Nc & m \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ *et supposons que pour tout caractère χ modulo m ou modulo n les conditions a) et b) soient réalisées avec* $C_\chi = C_m \chi(-N) G_\chi / (i^{-k} G_{\bar\chi})$, $C_m \cdot C_n = (-1)^k$, G_χ *– la somme de Gauss. Alors* :

$$f_{|k}\gamma = \frac{Ci^k}{C_m} f.$$

Démonstration. — Voir [8, chap. V, Lemmes].

LEMMA 1.3. — *Le groupe $\Gamma_0(N)$ admet l'ensemble suivant de générateurs*

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)\,;\ |b| \le N\right\}.$$

Démonstration. — Prenons une matrice arbitraire $\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. On peut supposer $b > 0$. Si $b > N$, $b^2 > bN$ et dans l'ensemble

$$\{ax - y\,;\ 0 \le x, y < b\},$$

il existe $ax_1 - y_1, ax_2 - y_2$ tels que $(ax_1 - y_1) \equiv (ax_2 - y_2) \bmod bN$; il existe donc des nombres x, y tels que $|x| < b$, $|y| < b$ et $ax \equiv y \bmod bN$. Soient $ax = y + tbN$ et $-b < y < 0$. On pose $u = (x, Nt + 1)$, $z = (Nt + 1)u$, $s = x/u$. Alors $|s| < b$, $|as + bz| < b$ et $(z, Ns) = 1$. Soient α, β les nombres tels que $\alpha z + \beta Ns = 1$. Il est facile de vérifier la relation suivante de matrices de $\Gamma_0(N)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta N & bz + as \\ (c\alpha - d\beta)N & dz + csN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -s \\ N\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Le LEMME 1.3 est démontré.

LEMME 1.4. — *Le groupe $\Gamma_0(N)$ admet l'ensemble suivant de générateurs :*

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)\,;\ 0 < a, d < N^2\right\}.$$

Démonstration. — Prenons une matrice arbitraire $\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}$ dans $\Gamma_0(N)$. Grâce au LEMME 1.3 on peut supposer que $|b| \le N$. Nous représentons a, d sous la forme suivante

$$a = a_0 + bNs,$$
$$d = d_0 + bNt$$

où $0 < a_0, d_0 < |b|\, N \le N^2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Nt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b \\ (c - ds - a_0 t)N & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Ns & 1 \end{pmatrix}.$$

Le LEMME 1.4 est démontré.