BULLETIN DE LA S. M. F.

SINNOU DAVID

Minorations de hauteurs sur les variétés abéliennes

Bulletin de la S. M. F., tome 121, n° 4 (1993), p. 509-544
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_4_509_0>

Bull. Soc. math. France,
121, 1993, p. 509–544.

MINORATIONS DE HAUTEURS SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

PAR

SINNOU DAVID (*)

RÉSUMÉ. — Nous donnons dans ce texte une minoration de la hauteur de Néron-Tate d'un point algébrique d'une variété abélienne principalement polarisée, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Il s'agit d'une première approche d'une généralisation à la dimension supérieure d'une conjecture de S. Lang (proposée par J. Silverman). La minoration dépend de la hauteur (stable) de la variété ainsi que d'un invariant de nature analytique. Il s'agit de la première minoration avec une borne inférieure pouvant tendre vers l'infini avec la hauteur de la variété. La preuve est basée sur une construction de transcendance.

ABSTRACT. — In the following, we prove a lower bound for the Néron-Tate height of an algebraic point of a principally polarized abelian variety defined over $\overline{\mathbb{Q}}$. This can be seen as a first approach of a generalisation of a conjecture of S. Lang, which was suggested by J. Silverman. Our lower bound depends on the logarithmic stable height of the variety and of an analytic invariant. This is the first lower bound which can go to infinity with the height of the variety. The proof of our result is based on transcendence methods.

1. Introduction

Une conjecture de S. LANG propose une minoration de la hauteur de Néron-Tate d'un point k-rationnel d'une courbe elliptique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Cette conjecture a été partiellement démontrée par M. HINDRY et J. SILVERMAN (voir [Hi-Si1]). Nous étudions dans ce texte le cas de la dimension supérieure. La démonstration de notre résultat est basée sur des méthodes de transcendance.

Rappelons dans un premier temps la conjecture de S. Lang (voir [L, p. 92] et [Si2]) :

(*) Texte reçu le 12 mai 1992.
S. DAVID, UFR 920, Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu, 75005 Paris (France).
Classification AMS : 11 G, 11 J, 14 K.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1993/509/$ 5.00

Conjecture 1.1 (Lang). — *Pour tout corps de nombres k, il existe une constante positive $c(k)$ telle que pour toute courbe elliptique E définie sur k et tout point P d'ordre infini de $E(k)$, on ait :*

$$\widehat{h}(P) \geq c(k) \max\bigl\{\log\bigl(|N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E)|\bigr), h(j_E)\bigr\},$$

où $\widehat{h}(P)$ désigne la hauteur de Néron-Tate sur E, $N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E)$ la norme de k sur le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ du discriminant minimal de la courbe E et $h(j_E)$ la hauteur de Weil logarithmique et absolue de l'invariant modulaire j_E de la courbe E.

Silverman [Si2, p. 396] généralise cette conjecture à la dimension supérieure. Un certain nombre de normalisations sont nécessaires pour lui donner un sens. Pour simplifier, nous nous placerons dans le cadre classique qui suit.

Soient k un corps de nombres plongé dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ sa clôture algébrique dans $\mathbb{C}$ et g un entier ≥ 1. On note S_g l'espace de Siegel formé par les matrices $g \times g$, symétriques, de partie imaginaire définie positive. On notera par une apostrophe la transposée d'une matrice, et tous les vecteurs considérés seront des vecteurs lignes.

Soit $\tau \in S_g$; posons $\Lambda = \mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g\tau$. L'espace analytique $\mathbb{C}^g/\Lambda$ se plonge dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$ via l'application $z \mapsto \Theta_\tau(z)$ dont les coordonnées sont les fonctions thêta :

$$(1)\quad \theta_m(\tau, 2z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\Bigl\{2i\pi\bigl[\tfrac{1}{2}(n+m_1)\tau(n+m_1)' + (n+m_1)(2z+m_2)'\bigr]\Bigr\},$$

où $m = (m_1, m_2)$ parcourt un système de représentants $\mathcal{Z}_2$ de $(\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g)^2$ (sauf lorsque cela sera explicitement mentionné, on fixera dans ce texte m_1 et m_2 dans $[0,1[^g$; on notera de même $\mathcal{Z}_\kappa$ un système de représentants de $\kappa^{-1}(\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g)^2$). L'image de ce plongement est une variété abélienne $A(\tau)$ admettant une polarisation principale associée à la forme de Riemann H, où $H(z,w) = z(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\bar{w}'$. On notera $\mathcal{L}$ le fibré inversible ample associé à H. Le plongement Thêta que nous avons introduit ci-dessus est donc un plongement projectif induit par le fibré inversible très ample $\mathcal{L}^{\otimes 4}$. Si $\mathcal{M}$ est un fibré en droites sur une variété abélienne A, nous noterons $K(\mathcal{M})$ l'ensemble $\{x \in A, T_x^\star(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}\}$. Par ailleurs, le groupe modulaire $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ agit sur S_g. On note $\mathcal{F}_g$ le « domaine fondamental » pour cette action décrit dans [Ig, p. 194]. On désigne d'autre part par h la hauteur de Weil logarithmique et absolue, sur $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$; on notera enfin $\widehat{h}$ la partie quadratique de la hauteur de Néron-Tate associée à la forme de Riemann H (qui coïncide d'ailleurs avec la hauteur de Néron-Tate, puisque $\mathcal{L}^{\otimes 4}$ est totalement symétrique). Dans tout ce qui suit — sauf mention explicite du contraire — « constante » signifiera « nombre réel > 0 ne dépendant que de g ». On notera $\| \cdot \|$ la norme du sup sur l'espace des matrices $g \times g$ muni de sa base canonique.

DÉFINITION 1.2. — Soit τ un élément de S_g tel que $\Theta_\tau(0) \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$; on note $h(\tau)$, ou $h(A(\tau))$, la hauteur du point $\Theta_\tau(0)$ de $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$.

Pour toute variété abélienne principalement polarisée définie sur un corps de nombres k, et munie d'une structure de niveau convenable, il existe une variété abélienne de la forme $A(\tau)$ ($\tau \in \mathcal{F}$) qui lui soit K-isomorphe (où K est une extension finie de degré controlé de k) et telle que la hauteur naïve définie ci-dessus soit comparable à la hauteur stable $h(A)$ de A (voir par exemple [Dav1, § 2] pour cette discussion). Il sera donc suffisant pour notre étude, de nous restreindre aux variétés de type $A(\tau)$ et de travailler avec la hauteur définie ci-dessus.

La conjecture de Silverman peut dans ces conditions s'énoncer comme suit :

CONJECTURE 1.3 (SILVERMAN). — *Pour tout corps de nombres k et tout nombre entier g, il existe une constante positive $c_1(k,g)$ telle que pour tout τ dans l'espace de Siegel S_g tel que la variété $A(\tau)$ soit définie sur k, et tout point P de $A = A(\tau)$, défini sur k, d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne $B \neq A$ de A, on ait l'inégalité :*

$$\widehat{h}\,(P) \geq c_1(k,g)h\big(A(\tau)\big).$$

Notons que cette conjecture, telle que nous l'avons énoncée ci-dessus est un peu plus faible que celle de Silverman, car nous n'avons pas tenu compte de la réduction additive. On pourrait également formuler la conjecture en terme de hauteur de Faltings.

Nous obtenons dans cette direction le résultat suivant :

THÉORÈME 1.4. — *Soient g un entier > 0, k un corps de nombres et τ un élément de $\mathcal{F}$, tel que la variété abélienne $A = A(\tau)$ soit définie sur k. Posons :*

$$D = \max\{2, [k : \mathbb{Q}]\}, \quad h = \max\{1, h(A(\tau))\}.$$

Il existe deux constantes $c_1 = c_1(g) > 0$ et $c_2 = c_2(g)$ telles que tout point P de $A(k)$ vérifie la propriété suivante :

- *ou bien il existe une sous-variété abélienne B de A (avec $B \neq A$), de degré $\leq c_2\rho(A,k)^g(\log\rho(A,k))^g$ telle que P soit d'ordre*

$$\leq c_2\rho(A,k)^g\big(\log\rho(A,k)^g\big) \quad \textit{modulo } B,$$

- *ou bien* $\widehat{h}\,(P) \geq c_1(g)\rho(A,k)^{-4g-2}\big(\log 2\rho(A,k)\big)^{-4g-1}h,$

où $\rho(A,k) = D(h + \log D)/\|\operatorname{Im}\tau\| + D^{1/(g+2)}$.

On en déduit immédiatement (en utilisant la minoration triviale $\frac{1}{2}\sqrt{3} \leq \| \operatorname{Im} \tau \|$ valable pour tout $\tau \in \mathcal{F}$) le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.5. — *Pour tout entier $g > 0$, il existe une constante c_3, telle que pour tout entier $D \geq 2$, tout réel $h \geq 2$, tout corps de nombres k de degré $\leq D$ sur $\mathbb{Q}$ et toute variété abélienne simple A définie sur k et de hauteur $h(A) \leq h$, de dimension g, principalement polarisée, tout point P de torsion (non nul) de $A(k)$ d'ordre n, on ait :*

$$D \geq c_3 \frac{n^{1/(2g)}}{\log(n)(h + \log n)}.$$

On notera que cette minoration est meilleure en h (un $h^{-1-\varepsilon}$ au lieu d'un $h^{-3/2}$) que le résultat que nous obtenons dans [Dav1], mais elle est plus mauvaise en n (un $n^{1/(2g)}$ au lieu d'un $n^{1/g}$).

COMMENTAIRES :

• Si A est une courbe elliptique, $h(A)$ est comparable à la hauteur de l'invariant modulaire $j(A)$. Par ailleurs, on déduit du q-développement de $j(\tau)$, les estimations suivantes, valables pour toute place à l'infini :

$$\left|\log\bigl(\max\{1, |j(\tau)|\}\bigr) - 2\pi |\operatorname{Im} \tau| \right| \leq \mathrm{O}(1)$$

(où τ est choisi dans le domaine fondamental du demi-plan de Poincaré pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ qui maximise sa partie imaginaire, et $\mathrm{O}(1)$ désigne une constante absolue). On en déduit que si A admet bonne réduction potentielle sur k,

$$\begin{aligned} h(j_A) &= \frac{1}{[k : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in S_\infty(k)} \varepsilon_v \log\bigl(\max\{1, |j(\tau_v)|\}\bigr) \\ &\leq 2\pi \max\bigl\{ |\operatorname{Im} \tau_v|,\ v \in S_\infty(k)\bigr\} + \mathrm{O}(1) \end{aligned}$$

(où v décrit l'ensemble $S_\infty(k)$ des places infinies de k, et $\epsilon_v = 1$ si la place v est réelle et 2 si elle est complexe). Il existe donc une constante absolue c_4 telle que $\min\{\rho(A_v, k_v),\ v \mid \infty\} \leq c_4 D \log(D)$ dans ce cas et par conséquent :

COROLLAIRE 1.6. — *Il existe une constante absolue c_5, telle que pour toute courbe elliptique E, définie sur un corps de nombres k de degré au plus D sur $\mathbb{Q}$, d'invariant modulaire entier, et pour tout point P de $E(k)$, d'ordre infini on ait :*

$$\widehat{h}(P) \geq c_5 D^{-6} (\log D)^{-11} h(j_E).$$