BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRISTOPH SORGER

La semi-caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux ω-quadratiques sur un schéma de Cohen-Macaulay

Bulletin de la S. M. F., tome 122, nº 2 (1994), p. 225-233

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_2_225_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 225–233.

LA SEMI-CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ DES FAISCEAUX ω-QUADRATIQUES SUR UN SCHÉMA DE COHEN-MACAULAY

PAR

CHRISTOPH SORGER (*)

RÉSUMÉ. — Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif de Cohen-Macaulay de dimension relative pure n entre schémas de type fini sur un corps algébriquement clos. Nous donnons la définition d'un faisceau $\omega_{X/S}$-quadratique (resp. $\omega_{X/S}$-symplectique) de dimension m sur les fibres de f et montrons que le théorème d'invariance mod 2 de Atiyah-Rees, Mumford et Kempf reste valable dans ce cadre plus général. Ensuite, nous l'appliquons à la variété de modules des faisceaux quadratiques semi-stables $\mathrm{Quad}_{X/S}(r)$ de [8] relative à un morphisme de Gorenstein de dimension 1.

ABSTRACT. — Let $f : X \to S$ be a projective Cohen-Macaulay morphism of pure relative dimension n between schemes of finite type over an algebraically closed field. We give the definition of a $\omega_{X/S}$-quadratic ($\omega_{X/S}$-symplectic) sheaf of dimension m on the fibres of f and show that the invariance mod 2 theorem of Atiyah-Rees, Mumford and Kempf is still valid in this more general context. We then apply the theorem to the moduli space of semi-stable quadratic sheaves $\mathrm{Quad}_{X/S}(r)$ of [8] relative to a Gorenstein morphism of dimension 1.

0. Introduction

Dans ce qui suit, soient k un corps algébriquement clos et $f : X \to S$ un morphisme projectif de Cohen-Macaulay (voir [EGA IV-2, §§ 6.6–6.8]) de dimension relative pure n entre k-schémas de type fini.

THÉORÈME 0.1. — *Supposons* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau cohérent sur* X *de dimension* m *sur les fibres de* f, *supposé* $\omega_{X/S}$*-quadratique si*

(*) Texte reçu le 29 septembre 1992, révisé le 1 février 1993.
C. SORGER, URA 212 du CNRS et UFR de Mathématiques, Université de Paris VII, aile 45–55, 5e étage, 2, place Jussieu F 75251 Paris CEDEX 05.
email : sorger@mathp7.jussieu.fr.
Classification AMS : 14F05.

$m \equiv 1 \bmod 4$ et $\omega_{X/S}$-symplectique si $m \equiv 3 \bmod 4$. Alors la fonction $\rho : S \to \mathbb{N}$, définie par

$$\rho(s) := \sum_{i \text{ pair}} \dim H^i(X_s, \mathcal{F}_s),$$

est localement constante modulo 2.

Dans le cas $n = m = 1$, f lisse et $\mathcal{F}$ localement libre, ce théorème — qui remonte à RIEMANN — est démontré par ATIYAH [1] et MUMFORD [6]. Dans le cas $n = m$ quelconque, f lisse et $\mathcal{F}$ localement libre, il est démontré en caractéristique 0 par ATIYAH et REES [2], puis en toute caractéristique $\neq 2$ par KEMPF [4] sous l'hypothèse supplémentaire que les fibres de f soient connexes. Le cas $n = 2$, $m = 1$ figure dans [8].

L'intérêt de cette généralisation vient du fait qu'il est parfois important de considérer le cas où les fibres de f sont singulières, voire non réduites, non forcément connexes, par exemple si $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est la courbe universelle de degré d sur une surface projective. Le but de cette note est de montrer comment on peut formuler et démontrer ce théorème dans ce cadre plus général. La démonstration s'inspire de la démonstration récente de KEMPF [4] et est basée sur l'observation plus forte suivante (PROPOSITION 2.1) : si $L^\bullet$ est une approximation de longueur m de la cohomologie de $\mathcal{F}$, la structure ω-quadratique (resp. ω-symplectique) donnée par l'isomorphisme symétrique (resp. antisymétrique) $\mathcal{F} \to \underline{\mathrm{Ext}}^{n-m}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_{X/S})$ induit, grâce à la dualité de Serre-Grothendieck, un isomorphisme symétrique (resp. antisymétrique) $L^\bullet \to L^{\bullet *}[-m]$ dans la catégorie dérivée $D^b_c(S)$.

Je voudrais remercier B. KELLER et J. LE POTIER pour les discussions que nous avons eues sur le sujet.

APPLICATION. — Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif de variétés algébriques irréductibles sur $\mathbb{C}$ et supposons que f soit de Gorenstein de dimension relative 1. Alors on peut construire, pour $r \in \mathbb{N}$, une variété $Q_{X/S}(r)$ sur S tel que au-dessus de tout point fermé $s \in S$, la fibre s'identifie à l'espace de modules des faisceaux quadratiques de multiplicité r sur X_s (cf. [8]). On déduit du théorème que $Q_{X/S}(r)$ a au moins deux composantes.

NOTATIONS

• On note X_s la fibre de f au-dessus du point s et si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, on note par $\mathcal{F}_s$ la restriction de $\mathcal{F}$ à X_s.

• Si $(L^\bullet, d_L)$ est un complexe de $\mathcal{O}_S$-modules, on désigne par $L^\bullet[m]$ le complexe translaté de m places à gauche, de différentielle $(-1)^m \mathrm{d}_L$ et par $\tau_{\leq m}(L^\bullet)$ le sous-complexe de L défini par

$$\cdots \to L^{m-2} \to L^{m-1} \to \mathrm{Ker}(\mathrm{d}^{\mathrm{m}}) \to 0.$$

• Si $(K^\bullet, d_K)$ est un autre complexe de $\mathcal{O}_S$-modules, le complexe de $\mathcal{O}_S$-modules $\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet(L^\bullet, K^\bullet)$ est défini en degré n par

$$\prod_{-p+q=n} \underline{\mathrm{Hom}}(L^p, K^q),$$

de différentielle $\mathrm{d}(f)^p = d_K \circ f^p - (-1)^n f^{p+1} \circ d_L$. Finalement, on note $L^{\bullet *}$ le complexe $\underline{\mathrm{Hom}}(L^\bullet, \mathcal{O}_S)$.

• Par $D(S)$, on désigne la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}(S)$; par $D_c(S)$ la sous-catégorie pleine des complexes à cohomologie cohérente ; par $D^b(S)$ la sous-catégorie pleine des complexes bornés à gauche et à droite et enfin, par $D^b_c(S)$ l'intersection dans $D(S)$ de $D_c(S)$ avec $D^b(S)$.

1. Faisceaux $\omega_{X/S}$-quadratiques ($\omega_{X/S}$-symplectiques)

Le cas absolu. — Soit $(X, \mathcal{O}_X(1))$ un schéma projectif de Cohen-Macaulay de dimension pure n sur un corps K. On note ω_X le faisceau dualisant sur X.

LEMME 1.1. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de dimension m sur X. On a :*

(i) $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{F}, \omega_X) = 0$ *pour* $i < n - m$.

(ii) *Si $\mathcal{F}$ est de Cohen-Macaulay, alors* $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{F}, \omega_X) = 0$ *pour* $i > n - m$.

Démonstration. — En effet, si $(A, \mathcal{M})$ est un anneau local nœthérien de Cohen-Macaulay, D un A-module dualisant, alors pour tout A-module de type fini M on a la formule (voir [7])

$$\mathrm{prof}_A(M) + \max_i \{\mathrm{Ext}^i_A(M, D) \neq 0\} = \dim(A),$$

ce qui démontre la deuxième assertion. La première assertion est bien connue et se déduit par exemple du théorème d'Ischebeck [5] en remarquant que $\mathrm{prof}_A(D) = \dim(A)$. $\square$

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de Cohen-Macaulay de dimension m sur X. Soit $c = n - m$. On pose :

$$\mathcal{F}^\vee := \underline{\mathrm{Ext}}^c_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X).$$

On déduit du lemme que le morphisme canonique d'évaluation $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme.

DÉFINITION 1.2. — On appelle faisceau ω_X-*quadratique* (resp. ω_X-*symplectique*) sur X la donnée d'un faisceau cohérent de Cohen-Macaulay $\mathcal{F}$ muni d'un isomorphisme $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\vee$ satisfaisant à la condition de symétrie $\sigma = \sigma^\vee$ (resp. $\sigma = -\sigma^\vee$)

Considérons le plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}_K^N$ donné par $\mathcal{O}_X(1)$. Soit $d = N - n$. Rappelons qu'on a l'isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^{i+d}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{F}, \omega_P).$$

En particulier,

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{F}, \omega_P) \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq c + d, \\ \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^c_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) & \text{si } i = c + d. \end{cases}$$

Le cas relatif. — Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif de Cohen-Macaulay de dimension relative pure n entre k-schémas de type fini. On note $\omega_{X/S}$ le faisceau dualisant relatif. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X de dimension m sur les fibres de f et soit $c = n - m$. On pose :

$$\mathcal{F}^\vee := \underline{\mathrm{Ext}}^c_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_{X/S}).$$

Considérons un plongement de X dans un espace projectif relatif au-dessus de S :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{P}^N_S \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

Posons $d = N - n$. Dans la démonstration de la proposition suivante (démontrée dans [8] si $n = m = 1$), on utilisera la suite spectrale suivante, reliant les groupes de cohomologie $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_s$ et $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_{P_s}}(\mathcal{F}_s, \mathcal{G}_s)$ pour $s \in S$.

LEMME 1.3. — *Soit $p : P \to S$ un morphisme projectif et lisse, soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux cohérents sur P, S-plats et $s \in S$. Alors on a la suite spectrale*

$$E_2^{p,q} = \underline{\mathrm{Tor}}^{\mathcal{O}_P}_{-p}\big(\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \mathcal{O}_{P_s}\big) \implies \underline{\mathrm{Ext}}^{p+q}_{\mathcal{O}_{P_s}}(\mathcal{F}_s, \mathcal{G}_s).$$

Démonstration. — Soit ℓ la dimension relative de p. On peut choisir une résolution

$$0 \to \mathcal{L}^{-\ell} \to \cdots \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{F} \to 0$$