Bulletin de la S. M. F.

René Michel

Restriction de la distance géodésique à un arc et rigidité

Bulletin de la S. M. F., tome 122, nº 3 (1994), p. 435-442

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_3_435_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 435–442.

RESTRICTION DE LA DISTANCE GÉODÉSIQUE À UN ARC ET RIGIDITÉ

PAR

RENÉ MICHEL

RÉSUMÉ. — On montre que localement la seule restriction de la distance géodésique à une courbe convexe permet d'identifier, à isométrie près, la métrique d'une surface si les données sont analytiques réelles.

ABSTRACT. — One shows how locally the only restriction of the geodesic distance to a convex curve, allows to identify the metric structure of a surface, in case of analytical assumptions.

1. Introduction

Dans cet article on traite de l'unicité d'une métrique Riemannienne dans un ouvert avec bord de $\mathbb{R}^2$ à laquelle on impose les distances entre les couples de points du bord. Ce problème a été d'abord considéré dans le contexte spécial des métriques conformes à la métrique canonique par ROMANOV [1] et MUHOMETOV [2]. Dans [3], la question a été traitée plus géométriquement. Après [3], ce problème a été rencontré en particulier par GROMOV [4] et étudié par CROKE [5], OTAL [6], GERVER-NADIRASHVILI [7]. Toutefois, la quasi-totalité des résultats de rigidité obtenus exigent l'hypothèse pour la métrique d'être à *courbure négative*; la seule exception est le cas d'une métrique à courbure *constante positive* comme il est prouvé dans [3] où ce problème avec bord est ramené à la résolution de la conjecture de Blaschke (GREEN 1953 pour $n = 2$, BERGER 1980) ou au théorème de Pu (1962), c'est-à-dire à des théorèmes réputés difficiles.

Nous prouvons ici que pour des métriques analytiques, dans une situation «locale» et *sans hypothèse de courbure*, il y a rigidité.

(*) Texte reçu le 14 janvier 1993, révisé le 15 février 1993.
R. MICHEL, Université d'Avignon, Faculté des Sciences, 33 rue Louis Pasteur, 84000 Avignon, France.
Classification AMS : 53C22.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1994/435/\$ 5.00

De façon plus précise on a l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Soient g_0 et g_1 deux métriques de classe C^∞ (resp. analytiques) définies sur un ouvert Θ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\widehat{AB}$ un arc de courbe de classe C^1 plongé dans Θ d'extrémités A et B ; on suppose que pour tout $i \in \{0,1\}$, pour tous $u, v \in \widehat{AB}$, il existe une unique géodésique γ^i_{uv} relative à la métrique g_i, $\gamma^i_{uv} : [0,1] \to \Theta$, telle que*

$$\gamma^i_{uv}(0) = u, \quad \gamma^i_{uv}(1) = v, \quad \gamma^i_{uv}(]0,1[) \cap \widehat{AB} = \emptyset,$$

et, si dist_i désigne la distance relative à g_i, $\mathrm{dist}_0(u,v) = \mathrm{dist}_1(u,v)$.

Alors il existe un difféomorphisme C^∞ (resp. analytique) $\delta : \Theta'_0 \to \Theta'_1$ avec Θ'_0 et Θ'_1 ouverts tels que $\widehat{AB} \subset \Theta'_0 \subset \Theta$, $\widehat{AB} \subset \Theta'_1 \subset \Theta$, qui est l'identité sur $\widehat{AB}$, et tel que les métriques $\delta^* g_1$ et g_0 ont le même jet à l'ordre infini en tout point de $\widehat{AB}$ (respectivement $\delta^* g_1 = g_0$, c'est-à-dire g_0 et g_1 sont isométriques).

D'après le théorème d'existence des voisinages convexes on peut localiser l'ouvert Θ en sorte que l'hypothèse d'unicité des géodésiques y soit réalisée pour g_0 et g_1. Par ailleurs, dans cette situation, si l'arc $\widehat{AB}$ est strictement convexe relativement à g_0 il l'est aussi relativement à g_1 : ceci se voit aisément puisque chaque distance est réalisée comme longueur d'une unique géodésique.

Ainsi le résultat de rigidité obtenu est optimal sous les hypothèses d'analyticité.

Ceci incite à conjecturer aussi cette rigidité si les hypothèses de régularité sont C^k (avec $k \geq 2$), dans le cas d'un disque convexe; dans la suite certains arguments ou remarques sont mis en évidence au passage avec cet objectif.

La démonstration du théorème utilise de façon essentielle des résultats obtenus dans [3] qui permettent de décrire les deux métriques dans un *même* système de coordonnées polaires.

2. Mise en situation normalisée des deux métriques

- Soit Θ_0 (resp. Θ_1) l'ouvert dont le bord est $\widehat{AB} \cup \gamma^0_{AB}$ (resp. $\widehat{AB} \cup \gamma^1_{AB}$).
- Notons $\exp_0$ et $\exp_1$ les applications exponentielles au point A.
- Soient ν_0 et ν_1 les vecteurs unitaires normaux principaux en A à $\widehat{AB}$.
- Soit $\phi : T_A(\Theta) \to T_A(\Theta)$ l'application linéaire qui est l'identité sur $T_A\widehat{AB}$ et telle que $\phi(\nu_0) = \nu_1$.

On a établi en [3] les faits suivants : le difféomorphisme

$$\delta = \exp_1 \circ \ \phi \circ \exp_0^{-1}$$

défini sur un voisinage Θ_0' de Θ_0 est tel que $\delta(\overline{\Theta_0}) = \overline{\Theta_1}$ et il se réduit à l'identité sur $\widehat{AB}$.

- Posons $\delta^* g_1 = g$; alors g et g_0 coïncident en tout point de $\widehat{AB}$.
- Posons

$$\begin{cases} \exp_0^{-1}(\Theta_0) = \exp^{-1}(\Theta_0) = \Omega, \\ \exp_0^{-1}(\widehat{AB}) = \exp^{-1}(\widehat{AB}) \overset{\text{def}}{=} \Gamma \overset{\text{def}}{=} \widehat{OP}. \end{cases}$$

Alors $\exp_0$ et $\exp$ coïncident dans un voisinage de Ω.

- Si l'on pose

$$r_0 = \exp^* g_0, \quad r = \exp^* g,$$

les géodésiques issues de 0 coïncident dans les deux métriques et on a le même système de coordonnées polaires (r, θ) tel que

$$\begin{cases} r_0 = \mathrm{d}t^2 + G_0 \, \mathrm{d}\theta^2, \\ r = \mathrm{d}t^2 + G \, \mathrm{d}\theta^2, \end{cases}$$

et les fonctions G_0 et G coïncident sur Γ à l'ordre 2.

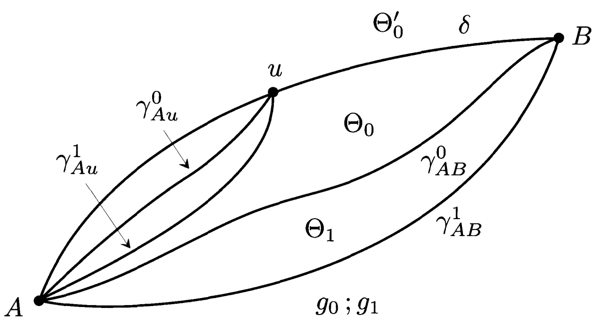

Figure 1

On prouve ci-après que G_0 et G ont le même jet à l'ordre infini sur Γ.

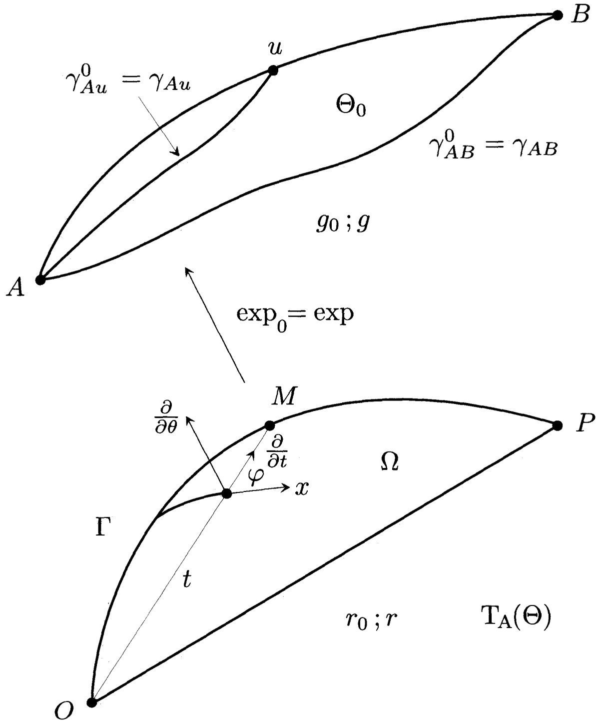

Figure 2 (*au-dessus*). *Figure 3* (*au-dessous*)

3. Quelques calculs dans les submersions sur les géodésiques

3.1. Notations dans les fibrés unitaires.

Notons U_0 et U les fibrés unitaires relatifs à r_0 et r sur un voisinage de Ω ; notons $\widehat{MN}$ un arc inclus dans Γ. Alors $\widehat{MN} \times \widehat{MN}$ s'identifie à l'ensemble des arcs géodésiques dont l'origine et l'extrémité sont sur $\widehat{MN}$ relativement aux métriques r ou r_0 ; ces arcs sont inclus dans Ω. Soit p (resp. p_0) la projection de U (resp.U_0) associant à un vecteur unitaire x l'arc géodésique tangent à x et relatif à r (resp. à r_0). Appelons $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}_0$) l'ensemble saturé par p (resp. p_0) de $\widehat{MN} \times \widehat{MN}$:

$$\mathcal{A} = p^{-1}(\widehat{MN} \times \widehat{MN}), \quad \mathcal{A}_0 = p_0^{-1}(\widehat{MN} \times \widehat{MN}).$$

Considérons les notations suivantes : soient $R \in \Omega$ et $Q \in \Gamma$. Soit γ_0 (resp. γ) l'arc de géodésique QR relatif à r_0 (resp. r) paramétré par la longueur d'arc ℓ_0 (resp. ℓ).