BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDREI RATIU

Le calcul des invariants θ_p des espaces lenticulaires

Bulletin de la S. M. F., tome 123, nº 2 (1995), p. 225-241

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_2_225_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 225–241.

LE CALCUL DES INVARIANTS θ_p DES ESPACES LENTICULAIRES

PAR

ANDREI RATIU (*)

RÉSUMÉ. — On calcule le rapport entre l'invariant topologique θ_p de [BHMV] et l'invariant homotopique Z_N de [MOO] pour les espaces lenticulaires $L(a,b)$.

ABSTRACT. — We calculate the quotient of the topological invariant θ_p of [BHMV] and the homotopical invariant Z_N of [MOO] for the lens spaces $L(a,b)$.

Introduction

Dans l'article [BHMV], on a défini pour chaque entier $p \geq 1$ un invariant $\theta_p(M)$ d'une variété M de dimension 3, close et orientée, en utilisant une présentation de M comme résultat d'une chirurgie de Dehn sur S^3 le long d'un entrelacs $\mathcal{L}$. On va calculer cet invariant pour les espaces lenticulaires $L(a,b)$ en mettant en évidence le rapport qui existe entre $\theta_p(L(a,b))$ et l'invariant $Z_N(L(a,b),q)$, défini dans [MOO], dans le cas où ce dernier invariant est non nul.

Les invariants de Witten introduits par la théorie de jauge de Chern-Simons sont calculés dans [J] pour les espaces lenticulaires et une formule explicite est obtenue seulement dans le cas $p = 2r$ et $\mathrm{pgcd}(a,r) = 1$. A présent, les espaces lenticulaires et les fibrés toriques (voir [J, th. 4.1]) constituent les seuls exemples dont les invariants θ_p ont pu être calculés pour presque tous p.

Soient $p \geq 3$ et M une variété de dimension 3 close et orientée obtenue par une chirurgie de Dehn sur S^3 le long d'un entrelacs en bandes $\mathcal{L}$. La

(*) Texte reçu le 22 juillet 1993, révisé le 25 mai 1994.
A. RATIU, U.F.R. de Mathématiques, 3e cycle, Université Paris 7, 75251 Paris CEDEX 05 ou Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine, P.O. BOX 1-764, RO-70700, Bucarest, Roumanie.
Email : ratiu@mathp7.jussieu.fr et ratiu@roimar.imar.ro.
Classification AMS : 57M25.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1995/225/$ 5.00
© Société mathématique de France

formule de [BHMV, th. B]

$$\theta_p(M) = \frac{\langle \Omega_p, \Omega_p, \ldots, \Omega_p \rangle_{\mathcal{L}}}{\langle t(\Omega_p)\rangle^{b_+(\mathcal{L})} \langle t^{-1}(\Omega_p)\rangle^{b_-(\mathcal{L})}}$$

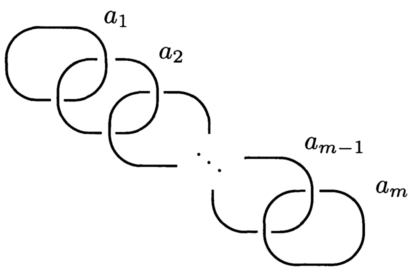
définit pour chaque $p \geq 3$ un invariant de M à valeurs dans l'anneau

$$\Lambda_p[1/p] \quad \text{où} \quad \Lambda_p = \mathbb{Z}[A]/\Phi_{2p}(A),$$

$\Phi_{2p}(A)$ étant le polynôme cyclotomique d'ordre $2p$. Le numérateur de la formule est une combinaison linéaire sur Λ_p de certains cablages de $\mathcal{L}$, dictée par un élement universel Ω_p et évaluée par le crochet de Kauffman (voir la définition du métacrochet de Kauffman dans [BHMV]). On va désigner par :

- B la matrice d'enlacement de $\mathcal{L}$,
- $b_+(\mathcal{L})$ (resp. $b_-(\mathcal{L})$) le nombre des valeurs propres positives (resp. négatives) de B,
- $\sigma = b_+(\mathcal{L}) - b_-(\mathcal{L})$ la signature de B.

Soient a et b premiers entre eux, tels que $0 < b < a$. L'espace lenticulaire $L(a, b)$ s'obtient par une chirurgie de Dehn sur S^3 le long de l'entrelacs en bandes $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ représenté dans la figure



avec la condition [Ro, p. 272] :

$$\frac{a}{b} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_m}}}.$$

Soit $Z_p(L(a, b))$ l'invariant homotopique défini dans [MOO] à partir de la matrice d'enlacement B, pour $L(a, b)$ et pour $N = p$ et $q = A^{(1+p)}$. Dans la section 4 on déduit que

$$Z_p\big(L(a, b)\big) \neq 0 \iff p \text{ impair ou } p \text{ pair et } v_2(p) \neq v_2(a)$$

où $v_\pi(x)$ est la π-valuation de l'entier x, pour tout π premier. Dans ce cas on va écrire :

- pour p impair, $p = p_1 p_2$, où

$$p_1 = \prod_{v_\pi(p) \le v_\pi(a)} \pi^{v_\pi(p)} \quad \text{et} \quad p_2 = \prod_{v_\pi(p) > v_\pi(a)} \pi^{v_\pi(p)} \,;$$

- pour p pair, $2p = p_1 p_2$, où

$$p_1 = \prod_{v_\pi(p) \le v_\pi(a)} \pi^{v_\pi(2p)} \quad \text{et} \quad p_2 = \prod_{v_\pi(p) > v_\pi(a)} \pi^{v_\pi(2p)} \,;$$

et soient u et v des entiers tels que

$$up_1 + vp_2 = 1.$$

Pour une racine de l'unité q d'ordre $r \ge 0$ et un nombre rationel α/β avec r et β premiers entre eux, on peut définir naturellement :

$$[q]^{\alpha/\beta} = q^{\alpha\beta^*} \quad \text{où} \quad \beta\beta^* \equiv 1 \pmod r.$$

Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 1. — *Soient $a > b > 0$ premiers entre eux, $p \ge 3$ et soit $d = \operatorname{pgcd}(p,a) > 0$. Si p est impair ou p est pair et $v_2(p) \neq v_2(a)$, on a pour l'espace lenticulaire $L(a,b)$:*

$$\frac{\theta_p(L(a,b))}{Z_p(L(a,b))} = \frac{[(-A)^{vp_2}]^{3+12s(a,b)-a/b}}{A^2 - A^{-2}} \sum \varepsilon \big[(-A)^{up_1}\big]^{2\varepsilon/a - 12s(b,a)},$$

la somme étant prise sur $\varepsilon = \pm 1$ tel que $b \equiv \varepsilon$ (mod d).

Ici, $s(a,b)$ désigne la somme de Dedekind [R, p. 145].

REMARQUE. — Cette formule, contenant une somme avec au plus deux termes, est plus simple que la formule obtenue dans [J, th. 3.4]. En particulier, si $b \not\equiv \pm 1 \pmod d$, on a $\theta_p(L(a,b)) = 0$.

1. Le calcul de $\theta_p(L(a,b))$ à partir de la matrice d'enlacement

Rappelons quelques définitons de l'article [BHMV]. Pour une variété M de dimension 3, compacte et orientée, on définit le module de Jones-Kauffman $K(M)$ comme le $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$-module engendré par les classes d'isotopie des entrelacs en bandes dans M, factorisé par les relations «skein» de Kauffman. Étant donné un entrelacs $\mathcal{L} \subset S^3$, sa classe dans $K(S^3)$ correspond — par l'isomorphisme $K(S^3) \cong \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ — à la valeur du crochet de Kauffman de $\mathcal{L}$, notée $\langle \mathcal{L} \rangle$. On montre que le module de Jones-Kauffman du tore solide standard $\mathcal{B} = K(S^1 \times I \times I)$ a une structure d'algèbre, isomorphe à l'algèbre polynômiale $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}][z]$, où z correspond à une bande axiale standard. En fait, la construction de $K(\;)$ définit un foncteur de la catégorie des 3-variétés compactes et orientées et leurs plongements propres. Dû aux faits que

$$K\Big(\bigsqcup_{i=1}^{m} (S^1 \times I \times I)_i\Big) \cong \mathcal{B}^{\otimes m}$$

et qu'un entrelacs à m bandes $\mathcal{L} \subset S^3$ définit un plongement d'un voisinage tubulaire de $\mathcal{L}$ dans S^3, le foncteur $K(\;)$ définit une application multilinéaire, nommée le *multi-crochet de Kauffman* :

$$\langle\; , \ldots , \;\rangle_{\mathcal{L}} : \mathcal{B}^{\otimes m} \longrightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}].$$

En particulier, $\langle z^{i_1}, z^{i_2}, \ldots, z^{i_m} \rangle_{\mathcal{L}}$ est la classe de l'entrelacs dans S^3 obtenu en remplaçant pour tout $j = 1, \ldots, m$, la j-ème composante de $\mathcal{L}$ par i_j bandes parallèles à celle-ci, situées dans un voisinage suffisamment petit.

Soient t l'automorphisme de $\mathcal{B}$ défini par un «twist» positif du tore solide standard et c l'endomorphisme de $\mathcal{B}$ qui fait correspondre à un entrelacs sa réunion disjointe avec une bande $J \times \partial(I \times I)$ où J est un petit intervalle compact dans S^1. Les deux opérateurs commutent et se diagonalisent simultanément par rapport à la base $(e_\ell)_{\ell \geq 0}$ dans $\mathcal{B} \cong \mathbb{Z}[A^{\pm 1}][z]$ définie par la relation de récurrence :

$$e_{\ell-1} + e_{\ell+1} = e_1 e_\ell, \quad \forall \ell \geq 1\,;$$

$$e_0 = 1, \quad e_1 = z.$$

On a donc $t(e_\ell) = \mu_\ell e_\ell$ et $c(e_\ell) = \lambda_\ell e_\ell$ où

$$\mu_\ell = (-1)^\ell A^{\ell^2 + 2\ell} \quad \text{et} \quad \lambda_\ell = -A^{2\ell+2} - A^{-2\ell-2}$$

pour tous $\ell \geq 0$. Rappelons aussi la formule

$$\langle e_{\ell-1} \rangle = (-1)^{\ell-1} \frac{A^{2\ell} - A^{-2\ell}}{A^2 - A^{-2}} \cdot$$