Bulletin de la S. M. F.

Pierre Dolbeault
Gennadi Henkin

Chaînes holomorphes de bord donné dans $\mathbb{C}P^n$

Bulletin de la S. M. F., tome 125, nº 3 (1997), p. 383-445
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_3_383_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 383–445.

CHAÎNES HOLOMORPHES DE BORD DONNÉ DANS $\mathbb{CP}^n$

PAR

PIERRE DOLBEAULT ET GENNADI HENKIN (*)

RÉSUMÉ. — Dans l'espace projectif $\mathbb{CP}^n$, ou plus généralement, dans un domaine linéairement q-concave X de $\mathbb{CP}^n$, on considère le problème suivant : trouver une p-chaîne holomorphe dans X, de bord une sous-variété M donnée de X, fermée, orientée, de dimension $(2p-1)$. On utilise les sous-espaces projectifs P de dimension $n-p+1$ contenus dans X. Théorème I. — Les deux conditions suivantes sont équivalentes : (i) M est le bord d'une p-chaîne holomorphe de X, de masse localement finie; (ii) M est maximalement complexe, de volume localement fini et, pour tout P contenu dans X et assez voisin d'un sous-espace donné, $M \cap P$ est une courbe de P, bord d'une 1-chaîne holomorphe de masse finie. Le théorème I se déduit du théorème II donnant une condition, généralisant la condition des moments d'Harvey-Lawson sur M, pour que M soit le bord d'une chaîne holomorphe, et aussi d'un théorème de compacité du type de Sachs-Uhlenbeck (1981). Le théorème II généralise le résultat obtenu en 1993 pour $p=1$. Des corollaires redonnent les théorèmes connus dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{CP}^{n-r}$ dus à Wermer, Harvey, Lawson, Chirka et d'autres. On s'est borné au cas où M est de classe C^2, éventuellement avec des singularités négligeables.

ABSTRACT. — In the projective space $\mathbb{CP}^n$, or more generally, in a q-linear concave domain X of $\mathbb{CP}^n$, we consider the following problem : find a holomorphic p-chain in X whose boundary is a given $(2p-1)$-dimensional oriented closed submanifold M of X. We use $(n-p+1)$-dimensional subspaces P of $\mathbb{CP}^n$ contained in X. Theorem I. – The following two conditions are equivalent : (i) M is the boundary of a holomorphic p-chain of X, of locally finite mass; (ii) M is maximally complex of locally finite volume and, for any P contained in X in a small enough neighborhood of a given subspace, $M \cap P$ is a curve in P bounding a holomorphic 1-chain of finite mass. Theorem I is deduced from theorem II giving a condition generalizing the moment condition of Harvey-Lawson for M, such that M be the boundary of a holomorphic chain , and also from a compacity theorem of the Sachs-Uhlenbeck type (1981). Theorem II generalizes the 1993 result for $p=1$. Corollaries give the known theorems in $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{CP}^{n-r}$ found by Wermer, Harvey, Lawson, Chirka and others. We restrict ourselves to M of class C^2, possibly with scar sets.

(*) Texte reçu le 11 avril 1997, accepté le 28 août 1997.
P. DOLBEAULT et Gennadi HENKIN, Institut de Mathématiques, UMR 9994 du CNRS, Université Pierre et Marie Curie, case 247, 4, place Jussieu, 75247 Paris CEDEX 05.
Email : dolbeaul@math.jussieu.fr et henhin@math.jussieu.fr.

Classification AMS : 32 C 30, 49 Q 15.

0. Introduction

0.1. — Dans une variété (ou un espace) analytique complexe X, de dimension complexe n, on considère une sous-variété M réelle, orientée, fermée, de classe C^2, de dimension $(2p-1)$, $(0 < p \leq n)$. On note aussi M le courant d'intégration sur M lorsque X est muni d'une métrique hermitienne. S'il existe une p-chaîne holomorphe T de $X \setminus M$, ayant une extension simple à X, notée encore T, telle que $\mathrm{d}T = M$, on dit que M est le bord de T. On cherche des conditions nécesaires et suffisantes pour que M soit le bord d'une p-chaîne holomorphe : c'est le *problème du bord* pour la sous-variété M dans X. Le cas $p = n$ est trivial.

Le problème a été résolu, dans $\mathbb{C}^n$, pour $p = 1$, par J. Wermer [41] et, avec des hypothèses de régularité de plus en plus faibles, par E. Bishop, H. Royden, G. Stolzenberg, H. Alexander, M. Lawrence [27] ; pour p quelconque, par R. Harvey et B. Lawson [15] et, avec des conditions de régularité plus faibles, par Dinh Tien Cuong [6] ; il a été également résolu, pour p quelconque, par R. Harvey et B. Lawson dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-r}$ et dans les sous-espaces analytiques de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-r}$ (voir [15], [16]).

À notre connaissance, J. King [24] a été le premier à poser le problème du bord dans l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Dans [17], Harvey et Lawson citent ce problème et des tentatives pour le résoudre.

Récemment [9], le problème du bord a été résolu dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, pour $p = 1$, M étant alors une courbe réelle, ou plus généralement une 1-chaîne.

Dans cet article, on obtient des solutions du problème du bord dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, pour p quelconque.

0.2. Définitions. — On va considérer un domaine de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, réunion non vide de sous-espaces projectifs H^q, de dimension q, de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. L'espace H^q étant la réunion de ses sous-espaces projectifs de dimension $r \leq q$, X est aussi la réunion de sous-espaces projectifs de dimension r. On désigne par $P_{\nu'}$ le sous-espace projectif, de dimension q, défini par le point ν' de la Grassmannienne $G_{\mathbb{C}}(q+1, n+1)$.

Un domaine X de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ sera dit (*linéairement*) *q-concave* [12] s'il existe un ouvert V' connexe, non vide, de $G_{\mathbb{C}}(q+1, n+1)$ tel que $X = \bigcup_{\nu' \in V'} P_{\nu'}$. Alors, pour $r \leq q$, X est aussi r-concave.

On munit $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ d'une métrique hermitienne, par exemple la métrique de Fubini-Study et X de la métrique induite.

Soit M une sous-variété fermée, orientée, de X, de classe C^2, de dimension $(2p-1)$ telle que $1 \leq n-p+1 \leq q$; d'après la remarque ci-dessus, X est $(n-p+1)$-concave.

Génériquement, le sous-espace projectif $P_{\nu'}$, $\nu' \in G_{\mathbb{C}}(n-p+2, n+1)$ coupe M suivant une courbe $\gamma_{\nu'}$, de classe C^2, contenue dans un ouvert affine $W \cong \mathbb{C}^n$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

0.3. THÉORÈME I. — *Dans les hypothèses de* 0.2, *les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *M est le bord d'une p-chaîne holomorphe de X de masse localement finie*;

(ii) *M est maximalement complexe et il existe un point ν'^* appartenant à $G_{\mathbb{C}}(n-p+2, n+1)$ tel que, pour tout ν' dans un voisinage de ν'^*, tout sous-espace projectif $P_{\nu'}$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est contenu dans X et possède la propriété suivante : $M \cap P_{\nu'}$ est une courbe $\gamma_{\nu'}$ de $P_{\nu'}$, contenue dans W, et est le bord d'une* 1*-chaîne holomorphe $S_{\nu'}$ de $P_{\nu'}$, de masse finie.*

Pour la résolution du problème du bord, on peut interpréter le théorème I comme la *réduction du cas p quelconque au cas $p = 1$ déjà résolu dans* [9].

0.3.1. REMARQUE. — L'exemple suivant [8], déduit d'un exemple de Harvey-Lawson [16], montre que l'hypothèse de maximale complexité sur M n'est pas suffisante. Soit M une hypersurface réelle d'une sous-variété algébrique Y, de dimension p de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ telle que M ne soit pas homologue à 0 dans Y; la variété M, comme hypersurface de Y, est maximalement complexe; s'il existe une chaîne holomorphe T dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ telle que $\mathrm{d}T = M$, alors le support de T est contenu dans Y, ce qui contredit le fait que M n'est pas homologue à 0 dans Y.

0.4. — Pour un système de coordonnées convenable (ξ, η),

$$\xi = (\xi_{n-p+1}, \ldots, \xi_n), \quad \eta = (\eta^1_{n-p+1}, \ldots, \eta^{n-p}_n)$$

de $G_{\mathbb{C}}(n-p+1, n+1)$, pour un système de coordonnées convenable $(z_1, \ldots, z_n)$ de W, pour $\zeta = (z_1, \ldots, z_{n-p})$ et pour une forme linéaire g de $\mathbb{C}^n$, telle que l'hyperplan $\{g = 0\}$ soit transverse à $P_{\nu'}$, on a le théorème suivant, sachant que, en général, pour $\nu \in G_{\mathbb{C}}(n-p+1, n+1)$, le sous-espace projectif $D_\nu = P_{\nu'} \cap \{g = 0\}$ ne rencontre pas $\gamma_{\nu'}$.

La démonstration du théorème I utilise ce théorème qui donne une autre solution du problème du bord, avec une hypothèse un peu plus faible.

Un fermé M de X est appelé une *sous-variété (de classe) C^2 à singularités négligeables*, s'il existe un fermé $\tau \subset M$ de mesure de Hausdorff $(2p-1)$-dimensionnelle nulle tel que $M \setminus \tau$ soit une sous-variété fermée de $X \setminus \tau$, orientée, de classe C^2, de dimension $(2p-1)$, de volume $(2p-1)$-dimensionnel localement fini, que $\mathrm{d}M = 0$ et que $1 \leq n-p+1 \leq q$.

La condition $\mathrm{d}M = 0$ ne résulte pas nécessairement de l'hypothèse faite sur T.

La variété M est dite *maximalement complexe* si $M \setminus \tau$ l'est.

THÉORÈME II. — *Dans les hypothèses ci-dessus, M étant une sous-variété C^2 à singularités négligeables, on considère la fonction*

$$G(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\nu'}}\zeta\,\frac{\mathrm{d}g}{g}\cdot$$

Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *M est le bord d'une p-chaîne holomorphe de X de masse localement finie*;

(iii) *M est maximalement complexe et il existe un point ν^* appartenant à $G_{\mathbb{C}}(n-p+1,n+1)$ dans un voisinage duquel il existe des fonctions holomorphes de (ξ,η), en nombre fini, satisfaisant au système d'équations aux dérivées partielles de l'onde de choc pour les variables (ξ,η), et telles que les dérivées secondes, par rapport à ξ, d'une combinaison linéaire de ces fonctions, et de G soient égales.*

En particulier, la condition (iii) *est satisfaite si M est maximalement complexe et $G=0$.*

L'énoncé précis du théorème II sera donné dans la section 1.

0.5. — La démonstration du théorème II a la même structure que celle du théorème principal de [9], avec une technique plus élaborée ; cette technique utilise, partiellement, celle de Harvey-Lawson. La démonstration du théorème I établit, d'abord, l'équivalence de (i) et de (ii) avec la condition supplémentaire : $S_{\nu'}$ dépend de ν' de façon continue, car un lemme de géométrie CR de Henkin-Tumanov [20], montre que cette dernière condition est équivalente à la condition (iii) du théorème II. En choisissant, pour chaque ν', une 1-chaîne holomorphe $\widehat{S}_{\nu'}$ de bord $\gamma_{\nu'}$ de volume minimum et, à l'aide d'un résultat de Sacks-Uhlenbeck [35], on montre que $\widehat{S}_{\nu'}$ varie continûment avec ν'. On applique, alors, le résultat précédent à la donnée des $\widehat{S}_{\nu'}$ au lieu de la donnée des $S_{\nu'}$.

0.6. Corollaires.

a) Les théorèmes I et II sont valides dans un sous-espace analytique complexe réduit Y d'un domaine q-concave X de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, en effet, la donnée M étant contenue dans Y, il existe des solutions T à support dans Y ; les conditions (ii) ou (iii) font intervenir le plongement de Y dans X.

b) $\Pi\cong\mathbb{C}\mathrm{P}^q$ étant un sous-espace projectif de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ contenu dans X, et M contenue dans $X\setminus\Pi$, avec $p\geq n-q+1$, il existe une solution unique à support dans $X\setminus\Pi$. On obtient, alors, divers corollaires des théorèmes I et II, en particulier, on retrouve les théorèmes de Rothstein (*cf.* [33], [34]), de Rossi [32], de Harvey et Lawson pour $X=\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ (*cf.* [15], [16]) et de Koppelman [26], Chirka pour $X=\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ et $q=n-1$ [4].