BULLETIN DE LA S. M. F.

BENOÎT FRESSE

Algèbre des descentes et cogroupes dans les algèbres sur une opérade

Bulletin de la S. M. F., tome 126, nº 3 (1998), p. 407-433
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_3_407_0>

Bull. Soc. math. France,
126, 1998, p. 407–433.

ALGÈBRE DES DESCENTES ET COGROUPES DANS LES ALGÈBRES SUR UNE OPÉRADE

PAR BENOÎT FRESSE (*)

RÉSUMÉ. — On considère l'algèbre des descentes graduée complétée $\Sigma^\wedge = \Pi_n \Sigma_n$ associée aux groupes symétriques S_n. Les idempotents eulériens $e^n \in \Sigma^\wedge$ forment une famille d'idempotents orthogonaux dans $\Sigma^\wedge$. On fixe une opérade algébrique $\mathcal{P}$ et on travaille dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres graduées. Soit R une $\mathcal{P}$-algèbre graduée connexe munie d'une structure de cogroupe. On montre que $\Sigma^\wedge$ agit de façon naturelle sur R ; par suite, on obtient une décomposition naturelle $R = \bigoplus_n e^n R$. On montre que la composante $e^1 R$ engendre R librement comme $\mathcal{P}$-algèbre. Dans le cas des algèbres commutatives $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$, on retrouve un théorème de structure classique sur les algèbres de Hopf commutatives.

ABSTRACT. — DESCENT ALGEBRA AND COGROUPS IN ALGEBRAS OVER AN OPERAD. — We consider the complete graded descent algebra $\Sigma^\wedge = \Pi_n \Sigma_n$ which is associated to the symmetric group S_n. The eulerian idempotents $e^n \in \Sigma^\wedge$ form a sequence of orthogonal idempotents in $\Sigma^\wedge$. Fix an algebraic operad $\mathcal{P}$; we work in the category of graded $\mathcal{P}$-algebras. Let R be a connected graded $\mathcal{P}$-algebra equipped with a cogroup structure. We show that R suports a canonical $\Sigma^\wedge$-action. As a consequence, we obtain a decomposition $R = \bigoplus_n e^n R$. We show that the component $e^1 R$ generates R freely as an $\mathcal{P}$-algebra. In the case of commutative algebras $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$, we recover a classical structure theorem on commutative Hopf algebras.

1. Introduction

Une algèbre de Hopf commutative est la donnée d'une algèbre commutative R munie d'un *coproduit* $\gamma : R \to R \otimes R$ et d'une *antipode* $\iota : R \to R$ vérifiant des relations classiques. Rappelons que le produit tensoriel représente le coproduit dans la catégorie des algèbres commutatives. Aussi on peut généraliser la notion d'algèbre de Hopf pour les

(*) Texte reçu le 1er avril 1998, accepté le 1er juin 1998.
Benoît FRESSE, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02 (France). Email : fresse@math.unice.fr.

Classification AMS : 16W0, 18C, 05E10.

Mots clés : cogroupe, algèbre des descentes de Solomon, opérade.

algèbres associatives, les algèbres de Lie, les algèbres de Poisson : dans la définition, on remplace le produit tensoriel par le coproduit dans la catégorie d'algèbres considérée. Génériquement, cette structure porte le nom de *cogroupe.* Dans cet article, on va travailler dans le cadre des algèbres sur une *opérade.* Une opérade est une structure algébrique spécifiant un type d'algèbres. Par exemple, on a une opérade pour les algèbres commutatives, pour les algèbres associatives, pour les algèbres de Lie, ou pour les algèbres de Poisson.

Il est bien connu (*cf.* [14]) que si R est une algèbre de Hopf commutative graduée connexe définie sur un corps de caractéristique nulle, alors R est une algèbre commutative libre. F. Patras a donné récemment une démonstration élégante de ce théorème (*cf.* [17]) qui a également l'avantage de fournir un module de générateurs canonique. Le but de cet article est de généraliser ce résultat pour les cogroupes des catégories d'algèbres sur une opérade. On établit le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *On suppose le corps de base de caractéristique nulle. Soit $\mathcal{P}$ une opérade non-graduée unitale connexe (cf. § 3). Soit R une $\mathcal{P}$-algèbre graduée connexe munie d'une structure de cogroupe. On a une décomposition canonique (appelée la* décomposition en poids)

$$R = \bigoplus_{i \geq 1} R^{(i)}$$

avec la propriété suivante. Notons

$$T_i(\mathcal{P}, R^{(1)}) = \mathcal{P}(i) \otimes_{S_i} R^{(1) \otimes i}$$

la composante de degré i de la $\mathcal{P}$-algèbre libre engendrée par $R^{(1)}$. Le produit de $\mathcal{P}$-algèbre induit un isomorphisme

$$T_i(\mathcal{P}, R^{(1)}) \xrightarrow{\simeq} R^{(i)}.$$

En particulier, la $\mathcal{P}$-algèbre R est librement engendrée par $R^{(1)}$.

Dans le cas de l'opérade des algèbres commutatives $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$, la composante $T_i(\mathcal{P}, -)$ est la composante de degré i de l'algèbre symétrique et on retrouve exactement le résultat classique (*cf.* [17]). Mentionnons que si R est la cogèbre tensorielle munie du coproduit de déconcaténation et du produit «shuffle», alors il est connu que la décomposition en poids de R fournit la décomposition en poids de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique (*cf.* [6], [7], [11], [12, chap. IV]).

La démonstration de F. Patras est basée sur l'étude de la structure de l'anneau des endomorphismes de R. Plus précisément, on se sert du produit de convolution dans $\operatorname{End} R$ pour construire des idempotents dans l'anneau des endomorphismes de R. Cette méthode n'est pas possible dans le cas général et doit être modifiée. En voici la raison. Fixons une opérade $\mathcal{P}$. Une *$\mathcal{P}$-algèbre* désigne une algèbre sur cette opérade $\mathcal{P}$. Le coproduit dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres n'est pas donné par le produit tensoriel. En général, l'expression du coproduit de deux $\mathcal{P}$-algèbres R et de S dépend de la structure d'algèbre de R et de S. Aussi, si $f : R \to R$ et $g : S \to S$ sont de simples applications linéaires, alors il n'y a pas moyen d'étendre f et g au coproduit $R \vee S$.

Voici notre méthode. On fixe un cogroupe R. On introduit $\Sigma^\wedge$, l'algèbre des descentes de Solomon, qui est munie d'un coproduit Δ, d'un produit $*$ appelé le *produit de convolution*, et d'un produit supplémentaire $\circ$ appelé le *produit de composition.* On se sert du produit de convolution $*$ pour construire une application $\Sigma^\wedge \to \operatorname{End} R$ qui commute au produit de composition. Le coproduit de $\Sigma^\wedge$ permet d'exprimer une relation de compatibilité entre l'action de $\Sigma^\wedge$ sur R et la structure d'algèbre de R. *In fine*, c'est cette relation de compatibilité qui permet d'étendre l'action de $s, t \in \Sigma^\wedge$ au coproduit $R \vee R$. Les idempotents donnant la décomposition en poids de R sont contenus dans $\Sigma^\wedge$.

Détaillons maintenant le contenu de l'article :

1) *L'algèbre des descentes de Solomon.* — On rappelle la description par générateurs et relations de l'algèbre des descentes de Solomon Σ.

2) *Action de l'algèbre des descentes sur un cogroupe.* — On construit l'action de l'algèbre des descentes sur un cogroupe.

3) *Décomposition d'un cogroupe. Théorème de structure.* — Dans ce paragraphe, on montre comment prouver le théorème de structure énoncé plus haut pour les cogroupes dans la catégorie des algèbres graduées sur une opérade au moyen de l'action de l'algèbre des descentes de Solomon. Dans le cas gradué, on retrouve les résultats de l'article [2]. La nouvelle démonstration a l'avantage de s'étendre au cadre différentiel gradué.

4) *Théorème de structure pour les cogroupes dans les algèbres de Hopf sur une opérade.* — On étend le théorème de structure du paragraphe précédent aux cogroupes dans la catégorie des algèbres sur une opérade qui sont munis d'une structure de cogèbre compatible.

5) *Théorème de structure pour les groupes dans les cogèbres sur une opérade.* — Dans ce paragraphe, en vue des applications en algèbre homologique, on énonce les résultats duaux à ceux obtenus dans les §§ 2–3.

Conventions. — On fixe un corps de base k de caractéristique nulle. On travaille principalement dans la catégorie des modules gradués qui est munie de son produit tensoriel habituel, l'opérateur de symétrie suivant la règle des signes. Un module gradué est supposé être nul en degré strictement négatif. On dit qu'un module gradué est *connexe* s'il est nul en degré zéro. Soit C une cogèbre. On utilise la convention de Sweedler pour représenter le coproduit de $c \in C$; explicitement :

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \in C \otimes C.$$

Remerciements. — Je suis infiniment reconnaissant à P. Cartier pour m'avoir indiqué les travaux de F. Patras. Je lui dois en particulier l'idée d'étendre ses démonstrations au cadre des algèbres sur une opérade.

2. L'algèbre des descentes de Solomon

Dans ce paragraphe, on introduit l'algèbre des descentes de Solomon en donnant une description par générateurs et relations. Pour une présentation plus classique, on se reportera à [21] ou à [20, chap. 9].

2.1. Compositions. — On appelle *composition* une suite finie d'entiers $I = (i_1, \ldots, i_r)$; l'entier r est appelé la *longueur* de I. On dit que I est *réduite* quand les entiers $i_1, \ldots, i_r$ sont non nuls. À une composition quelconque I, on associe la composition réduite $\widetilde{I}$ obtenue en retirant les termes nuls.

2.2. L'algèbre des descentes de Solomon. — On notera Σ l'*algèbre graduée des descentes de Solomon* pour les groupes symétriques. En fait, Σ est une bigèbre cocommutative munie d'un produit associatif supplémentaire qu'on appelle le produit de composition. On note respectivement $*$ et Δ le produit et le coproduit de bigèbre; on note $\circ$ le produit de composition.

Rappelons d'abord la structure de bigèbre. Pour le produit $*$, l'algèbre Σ est librement engendrée par des éléments notés p_i où $i \in \mathbb{N}^*$. L'unité du produit $*$ est notée p_0. Le coproduit Δ est défini par

$$\Delta p_n = \sum_{i+j=n} p_i \otimes p_j.$$

En fait, $\langle p_i,\, i \geq 0\rangle$ est la cogèbre cocommutative colibre à un cogénérateur et Σ est l'algèbre de Hopf libre engendrée par cette cogèbre. Considérons une composition $I = (i_1, \ldots, i_r)$; on note traditionellement

$$p_I = p_{i_1} * \cdots * p_{i_r}.$$