

# BULLETIN DE LA S. M. F.

LAURENT EVAIN

## **Une minoration du degré de courbes planes à singularités imposées**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 126, n° 4 (1998), p. 525-543

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1998\\_\\_126\\_4\\_525\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_4_525_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNE MINORATION DU DEGRÉ DE COURBES PLANES À SINGULARITÉS IMPOSÉES

PAR LAURENT EVAIN (\*)

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, on montre que le degré d'une courbe de  $\mathbb{P}^2$  passant par  $r$  points en position générale avec multiplicité  $m$  est strictement plus grand que  $\sqrt{r}m$  sous l'une des deux conditions suivantes :  $r$  est un carré parfait supérieur ou égal à dix ou  $r$  est plus grand que  $(8m(m+1)/(4m-1))^2$ . Ce résultat s'inscrit dans une conjecture générale de Nagata, et le premier cas était déjà connu par Nagata lui-même.

ABSTRACT. — A LOWER BOUND FOR THE DEGREE OF CERTAIN PLANE CURVES WITH PRESCRIBED SINGULARITIES. — It is shown that the degree of a projective plane curve through  $r$  generic points with multiplicity  $m$  is strictly greater than  $\sqrt{r}m$  provided one of the following two conditions is satisfied :  $r$  is a perfect square greater or equal to ten or  $r$  is greater than  $(8m(m+1)/(4m-1))^2$ . This result is part of a conjecture of Nagata, and the first case was already known to Nagata himself.

### 1. Introduction

En liaison avec la construction de son contre-exemple au quatorzième problème de Hilbert, Nagata a émis la conjecture suivante : pour tout entier  $r$  supérieur ou égal à dix, le plus petit degré  $d_0$  d'une courbe de  $\mathbb{P}^2$  passant par  $r$  points en position générale, avec multiplicité  $m$  en chacun d'entre eux, est supérieur strictement à  $\sqrt{r}m$ .

Le système linéaire des courbes planes de degré  $d$  passant par  $r \geq 10$  points génériques a pour dimension attendue

$$\max\left(0, \frac{1}{2}(d+1)(d+2) - \frac{1}{2}rm(m+1)\right).$$

Si les systèmes linéaires avaient toujours la dimension attendue, on pourrait donner une estimation asymptotique de  $d_0$  quand  $m$  tend vers

---

(\*) Texte reçu le 29 juillet 1997, accepté le 4 juin 1998.

L. EVAIN, Université d'Angers, Département de Mathématiques, 2 Bd Lavoisier, 49045 Angers CEDEX (France).

E-mail : [evain@tonton.univ-angers.fr](mailto:evain@tonton.univ-angers.fr) et <http://193.49.162.129/evain/home.html>.

Classification AMS : 14B07, 14H20.

Mots clés : singularités, courbe plane, gros point, collision.

l'infini et  $r$  varie arbitrairement :

$$d_0 = \sqrt{r}m + o(\sqrt{r}m),$$

où le  $o$  est une quantité positive. Autrement dit, la borne proposée par Nagata est asymptotiquement la meilleure possible.

Nagata a montré dans [N1], [N2] la conjecture dans le cas où  $r$  est un carré parfait. Dans le cas particulier des courbes réduites et irréductibles, Xu a montré dans [X] les inégalités

$$d > \sqrt{r}m - \frac{1}{2\sqrt{r-1}} \quad \text{et} \quad d \geq \sqrt{r-1}m.$$

Dans [AH], Alexander et Hirschowitz s'intéressent à un problème plus pointu, mais il résulte de leur travail que la conjecture de Nagata est vraie quand  $r$  est suffisamment grand devant  $m$ . Aucune borne précise n'est spécifiée, mais j'ai été informé par les auteurs que cette borne devrait être de l'ordre de  $m^m$ .

Dans ce travail, nous donnons une nouvelle preuve du résultat de Nagata (théorème 21), et nous démontrons (théorème 22) la conjecture sous la condition numérique

$$r \geq \left( \frac{8m}{4m-1} (m+1) \right)^2.$$

Notons que les conditions liant  $r$  et  $m$  dans le deuxième théorème ne s'appliquent pas aux problèmes rencontrés par Nagata (par exemple lors de la construction de son contre-exemple au quatorzième problème de Hilbert) qui avait besoin d'un énoncé avec  $r$  fixé et  $m$  arbitrairement grand.

Les démonstrations sont basées sur les notions de gros point et de collision.

- Un *gros point de taille  $m$*  est un sous-schéma de  $\mathbb{P}^2$  défini par la puissance  $m$ -ième  $I_p^m$  d'un faisceau d'idéaux  $I_p$  définissant un point simple  $p$ .

- Un sous-schéma ponctuel  $C$  de  $\mathbb{P}^2$  est une *collision totale de gros points de taille  $m_1, \dots, m_r$*  si  $C$  peut être obtenu comme limite plate d'une réunion disjointe de gros points de taille  $m_1, \dots, m_r$  quand les gros points approchent les uns des autres. En d'autres termes,  $C$  est la fibre spéciale d'une famille plate de sous-schémas de  $\mathbb{P}^2$  dont la fibre générale est une réunion de  $r$  gros points de taille  $m_1, \dots, m_r$ .

Le lien entre les collisions de gros points et le problème de Nagata est le suivant. Appelons *multiplicité d'un schéma ponctuel  $C$  supporté par*

un point  $p$  la plus petite multiplicité en  $p$  d'une courbe contenant  $C$ . La conjecture de Nagata est vérifiée si et seulement si il existe une collision  $C$  de  $r$  gros points de taille  $m$  de multiplicité strictement supérieure à  $\sqrt{r}m$  (cf. [E]). Les démonstrations consistent à construire de telles collisions.

La démonstration du théorème 21 est plus facile car les conditions arithmétiques sont favorables. En utilisant de simples collisions de schémas monômiaux le long de courbes lisses (collisions de front), on démontre une version faible du théorème, où on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large. Il nous faut cependant produire une collision moins naïve pour montrer l'inégalité stricte. Cette collision s'obtiendra par un procédé dit de  $(1, -n)$  *spécialisation*, qui consiste à faire dégénérer des automorphismes du plan affine (proposition 7 et corollaire 9), et qui n'est valable que lorsque le corps de base est de caractéristique nulle.

Pour le théorème 22, les choses se compliquent car on ne peut plus utiliser de propriété arithmétique favorable. On construit alors des collisions en utilisant le principe général suivant : des collisions de grande multiplicité doivent pouvoir être construites en bougeant les gros points le long de courbes unibranches admettant une singularité d'ordre élevé, et en collisionnant les points sur cette singularité. Cela nous amène à la notion de *collision hypersingulière* (définition-proposition 11). En fait, nous ne calculons pas entièrement les collisions hypersingulières. Nous donnons cependant un énoncé (proposition 16) qui nous permet de contrôler suffisamment ces collisions pour démontrer le théorème.

Le plan adopté est le suivant. La section 2 rappelle quelques notions de base sur les schémas de dimension zéro qui sont manipulés dans les sections suivantes. La section 3 prépare la démonstration des théorèmes et introduit les collisions nécessaires : collision de front,  $(1, -n)$  spécialisation et collision hypersingulière. Enfin, les théorèmes 21 et 22 sont démontrés dans la section 4.

## 2. Schémas de dimension zéro

Dans toute la suite,  $k$  sera un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, sauf mention explicite du contraire.

On appelle *escalier* une partie  $E$  de  $\mathbb{N}^2$  dont le complémentaire  $C$  vérifie  $C + \mathbb{N}^2 \subset C$ . Pour un escalier  $E$ , on notera

- $c(E)$  son cardinal (éventuellement infini) ;
- $o(E)$  son ordre, qui est le plus petit entier  $d$  pour lequel il existe un couple  $(a, b)$  dans  $\mathbb{N}^2 - E$  avec  $a + b = d$ .

Tout escalier  $E$  définit un idéal  $I^E$  de  $k[[x, y]]$  formé par les éléments

$$f = \sum c_{ij} x^i y^j \quad \text{vérifiant } c_{ij} = 0 \text{ si } (i, j) \text{ appartient à } E.$$

On dira parfois par abus de langage qu'un monôme  $m = x^a y^b$  est dans  $E$  si  $(a, b)$  est dans  $E$ . Avec cette convention,  $I^E$  est l'idéal engendré par les monômes hors de  $E$ .

Soit  $p$  un point de  $\mathbb{P}^2$ . Le complété  $\widehat{O}_{\mathbb{P}^2, p}$  de l'anneau local de  $\mathbb{P}^2$  en  $p$  est isomorphe à l'anneau de séries formelles  $k[[x, y]]$ . En particulier, moyennant le choix d'un isomorphisme, tout sous-schéma ponctuel de  $\mathbb{P}^2$  supporté par  $p$  peut être vu comme un sous-schéma de  $\text{Spec } k[[x, y]]$ .

**DÉFINITION-PROPOSITION 1.** — *Un sous-schéma ponctuel  $X$  de  $\mathbb{P}^2$  supporté par  $p$  est dit monomial d'escalier  $E$  si on peut choisir un isomorphisme entre  $\widehat{O}_{\mathbb{P}^2, p}$  et  $k[[x, y]]$  tel que l'idéal définissant  $X$  dans  $\text{Spec } k[[x, y]]$  soit  $I^E$ . La colongueur d'un tel schéma est  $c(E)$  et sa multiplicité est  $o(E)$ .*

**EXEMPLE 2.** — Les gros points de taille  $m$  de  $\mathbb{P}^2$  sont les schémas monomiaux d'escalier  $E_m$ , avec  $E_m = \{(a, b), a + b < m\}$ . On dira que  $E_m$  est l'escalier régulier de rang  $m$ .

Suivant la stratégie expliquée dans l'introduction, nous allons construire une collision de  $r$  gros points de taille  $m$  de multiplicité supérieure à  $\sqrt{r} m$ . Plus précisément, nous allons construire par collisions un schéma monomial d'escalier  $E$ , où  $E$  est d'ordre supérieur à  $\sqrt{r} m$ .

3. Constructions de collisions

Commençons par remarquer que puisque deux schémas monomiaux de même escalier ne diffèrent que d'un changement de coordonnées, si on montre qu'un schéma monomial d'escalier  $E$  est une collision de  $r$  gros points de taille  $m_1, \dots, m_r$ , alors tous les schémas monomiaux d'escalier  $E$  seront des collisions de  $r$  gros points de taille  $m_1, \dots, m_r$ .

Nous allons présenter trois types de collision : collision de front, collision par  $(1, -n)$  spécialisation et enfin collision hypersingulière. Pour chacune de ces collisions, nous allons définir une opération combinatoire sur les escaliers, puis expliquer que cette opération combinatoire correspond à une notion géométrique de collision.

3.1. Collision de front.

Tout escalier fini  $E$  de  $\mathbb{N}^2$  peut être défini par une suite décroissante  $n_i$  d'entiers naturels nuls à partir d'un certain rang et par la relation :

$$(x, y) \in E \iff y < n_x.$$