BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRISTOPHE BREUIL

Une remarque sur les représentations locales p-adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert

Bulletin de la S. M. F., tome 127, n^{o} 3 (1999), p. 459-472

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1999__127_3_459_0>

Bull. Soc. math. France,
127, 1999, p. 459–472.

UNE REMARQUE SUR LES REPRÉSENTATIONS LOCALES p-ADIQUES ET LES CONGRUENCES ENTRE FORMES MODULAIRES DE HILBERT

PAR CHRISTOPHE BREUIL (*)

RÉSUMÉ. — On donne une nouvelle preuve du fait que les représentations galoisiennes p-adiques associées par Taylor (dans le cas général) aux formes modulaires de Hilbert sont cristallines en p pour p suffisamment grand. Cette preuve, basée sur les résultats de Taylor (*cf.* [Ta1]), n'utilise que des techniques de congruences.

ABSTRACT. — A REMARK ON LOCAL p-ADIC GALOIS REPRESENTATIONS AND CONGRUENCES BETWEEN HILBERT MODULAR FORMS. — We give a new proof of the fact that the p-adic Galois representations associated by Taylor (in the general case) to Hilbert modular forms are crystalline at p for p big enough. This proof, based on Taylor's results (see [Ta1]), only uses congruences techniques.

Sommaire

1. Introduction

Soient F un corps de nombres totalement réel et f une forme modulaire de Hilbert de poids tous ≥ 2 qui correspond à une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$. Lorsque $[F:\mathbb{Q}]$ est impair, ou lorsque $[F:\mathbb{Q}]$ est

(*) Texte reçu le 2 décembre 1998, accepté le 10 mars 1999.
C. BREUIL, Mathématiques, Bât. 425, U.R.A. 752 du C.N.R.S., Université Paris-Sud, 91405 Orsay CEDEX (France). Email : breuil@math.u-psud.fr
Classification AMS : 11F33, 11F41, 11F85.

Mots clés : forme modulaire de Hilbert, représentation galoisienne, représentation cristalline.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1999/459/\$ 5.00

pair mais qu'il existe une place finie ν de F telle que π_ν est spéciale ou supercuspidale, la construction de représentations galoisiennes associées à f à partir de la cohomologie étale p-adique des courbes de Shimura sur F est classique et bien connu (voir [Ca1]). Dans les cas restants, il y a deux façons de s'y prendre pour obtenir les représentations manquantes. Soit on trouve des «congruences» modulo p^n pour tout n avec des formes du type précédent, et on construit les représentations par passage à la limite projective à partir des représentations déjà connues : c'est la méthode suivie par Taylor dans [Ta1]. Soit on arrive à construire un motif associé à la forme f, et les représentations se déduisent des réalisations p-adiques du motif : c'est la méthode suivie par Blasius-Rogawski dans [BR] lorsque l'un des poids de f est > 2. La construction de [BR] montre en outre, par les théorèmes de comparaison en théorie de Hodge p-adique, que dans ce cas les représentations locales obtenues (en «$\ell = p$») sont potentiellement semi-stables, donc Hodge-Tate, et même cristallines pour $p \gg 0$. Dans [Ta2], Taylor montre que lorsque tous les poids sont 2, ces représentations locales sont encore cristallines pour $p \gg 0$.

Le but de cette note est de retrouver ces résultats de cristallinité uniquement à partir des congruences de [Ta1] et de quelques manipulations simples sur les algèbres de Hecke et les pseudo-représentations de degré 2. Plus précisément, nous obtenons :

THÉORÈME 1. — *Soit f une forme modulaire de Hilbert propre, de niveau $\mathfrak{N}$ (un idéal entier de F), de poids tous ≥ 2 et de même parité et soit w le plus grand des poids. Soient $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'un corps de nombres suffisamment grand, $\mathfrak{p}$ une place de $\mathcal{O}$ au-dessus d'un nombre premier p, $\mathfrak{q}$ une place de F au-dessus de p, $G_\mathfrak{q}$ un groupe de décomposition de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ en $\mathfrak{q}$ et $\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ la représentation construite dans* [Ta1] *à partir de f.*

1) *Si $p > 2$ et $\mathfrak{q}$ ne divise pas $\mathfrak{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho_{f|G_\mathfrak{q}}$ mod $\mathfrak{p}^n$ est un sous-quotient d'une représentation cristalline* (*cf.* [Fo1]) *à poids de Hodge-Tate entre* 0 *et* $w-1$.

2) *Si $p > w$, $\mathfrak{q}$ non ramifié dans F et ne divise pas $\mathfrak{N}$, alors $\rho_{f|G_\mathfrak{q}} \otimes \mathbb{Q}_p$ est cristalline à poids de Hodge-Tate entre* 0 *et* $w-1$.

Bien sûr, ce théorème n'a d'intérêt que lorsque ρ_f n'est pas accessible par la cohomologie des courbes de Shimura sur F (sinon, tout est connu). La condition «$p > 2$» en 1) provient de la théorie des pseudo-représentations de degré 2 sur un anneau de valuation discrète (voir [Wi2]). Les conditions «$\mathfrak{q}$ non ramifié» et «$p > w$» en 2) proviennent de restrictions inhérentes aux outils p-adiques (standards) utilisés développés dans le paragraphe 2. Ces trois conditions sont bien sûr normalement superflues. La preuve occupe le paragraphe 3. Son principe est le suivant : pour démontrer 1), on se débrouille pour construire pour tout n, à partir des pseudo-représentations de [Ta1] sur les algèbres de Hecke (qui sont des pseudo-représentations « classiques » à la Wiles), un $\mathbb{Z}_p$-réseau stable par Galois dans une représentation cristalline ainsi qu'une surjection de ce réseau vers $\rho_{f|G_{\mathfrak{q}}}$ modulo $\mathfrak{p}^n$; pour en déduire 2), on passe à la limite projective sur 1), ce qui oblige, faute de mieux, aux restrictions énoncées. La méthode est explicite et particulière aux pseudo-représentations telles qu'introduites initialement par Wiles, *i.e.* avec GL_2 et un corps totalement réel. Elle ne s'étend probablement pas aux pseudo-représentations de degré supérieur définies par Taylor [Ta3].

Cette (modeste) note est concomitante à l'apprentissage modulaire de l'auteur. Dans la version initiale, la référence [Ta2] (qui traite du poids 2) n'était pas connue de l'auteur. Elle lui a été signalée après coup par J. Tilouine. Qu'il en soit remercié, ainsi que L. Clozel, A. Genestier et P. Gille pour d'utiles discussions.

2. Deux propositions sur les représentations cristallines et semi-stables

Dans ce paragraphe, k désigne un corps parfait de caractéristique $p > 0$, W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et K_0 le corps des fractions de W. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}_0$ de K_0 et on note

$$G_{K_0} = \mathrm{Gal}(\overline{K}_0/K_0).$$

2.1. — On renvoie à [Fo1] pour les définitions et propriétés des représentations cristallines et semi-stables de G_{K_0}. On rappelle que les représentations cristallines sont semi-stables et que les représentations semi-stables sont Hodge-Tate. De plus, à chaque représentation semi-stable V de G_{K_0}, à poids de Hodge-Tate entre 0 et r avec $r \in \mathbb{N}$, Fontaine associe un (ϕ, N)-module filtré

$$D(V) = \mathrm{Hom}_{G_{K_0}}(V, B_{\mathrm{st}}^{+})$$

qui est un K_0-espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathbb{Q}_p} V$ muni d'une collection de sous-K_0-espaces vectoriels $(\mathrm{Fil}^i D(V))_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Fil}^i D(V) = D(V) && \text{si} \quad i \le 0,\\ &\mathrm{Fil}^{i+1} D(V) \subset \mathrm{Fil}^i D(V) && \text{si} \quad 0 \le i \le r,\\ &\mathrm{Fil}^i D(V) = 0 && \text{si} \quad i \ge r+1, \end{aligned}$$

d'une application semi-linéaire injective $\phi : D(V) \to D(V)$ et d'une application linéaire $N : D(V) \to D(V)$ telle que

$$N\phi = p\phi N.$$

On a $N = 0$ si et seulement si la représentation est cristalline et $D(V)$ s'identifie alors à $\mathrm{Hom}_{G_{K_0}}(V, B^+_{\mathrm{cris}})$.

DÉFINITION 2. — *Soit V une représentation cristalline de G_{K_0} à poids de Hodge-Tate entre* 0 *et r ($r \in \mathbb{N}$). On appelle réseau fortement divisible de $D(V)$ tout W-réseau M de $D(V)$ stable par ϕ tel que*

$$\phi\big(\mathrm{Fil}^i D(V) \cap M\big) \subset p^i M \quad \textit{pour tout} \quad i \in \mathbb{Z}$$

et

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (\phi/p^i)\big(\mathrm{Fil}^i D(V) \cap M\big) = M.$$

Lorsque V est cristalline, on peut montrer que $D(V)$ contient toujours un tel réseau (*cf.* [La, 3.2]). Ces réseaux sont utiles essentiellement lorsque $r \le p-2$. La proposition suivante est bien connue des spécialistes.

PROPOSITION 3. — *Soient V une représentation cristalline de G_{K_0} à poids de Hodge-Tate entre* 0 *et $p-2$ et $D(V)$ son ϕ-module filtré. Alors il y a une (anti-) équivalence de catégories entre les $\mathbb{Z}_p$-réseaux stables par G_{K_0} de V et les W-réseaux fortement divisibles de $D(V)$.*

Preuve. — Si M est un objet de la catégorie de Fontaine-Laffaille $\underline{MF}^{f,p-2}_{\mathrm{tor}}$ (voir [FL, 3.2]), on pose :

$$V^*_{\mathrm{cris}}(M) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{comp}}(M, A_{\mathrm{cris}} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

où A_{cris} est l'anneau introduit par Fontaine et l'indice « comp » signifie qu'on prend les applications $\mathbb{Z}_p$-linéaires et compatibles aux diverses structures (voir [FL, 3] ou [Br1, 3.2.1]). À chaque W-réseau fortement divisible M de $D(V)$, on peut alors associer un $\mathbb{Z}_p$-réseau $V^*_{\mathrm{cris}}(M)$ de V stable par G_{K_0} en posant :

$$\begin{aligned} V^*_{\mathrm{cris}}(M) &= \varprojlim V^*_{\mathrm{cris}}(M/p^n M) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{comp}}(M \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A_{\mathrm{cris}} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{comp}}(M, A_{\mathrm{cris}}) \end{aligned}$$

et la suite exacte

$$0 \to M/p^n M \longrightarrow M \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \xrightarrow{p^n} M \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to 0$$