BULLETIN DE LA S. M. F.

ANNE VIRRION

Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 128, nº 1 (2000), p. 1-68
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_1_1_0>

Bull. Soc. math. France,
128, 2000, p. 1–68.

DUALITÉ LOCALE ET HOLONOMIE POUR LES $\mathfrak{D}$-MODULES ARITHMÉTIQUES

PAR ANNE VIRRION (*)

RÉSUMÉ. — L'objet de cet article est l'étude du foncteur de dualité $\mathbb{D}$ dans le cadre de la théorie des $\mathcal{D}$-modules développée par Berthelot en caractéristique mixte. Le premier point est de dégager les structures nécessaires à une définition satisfaisante de ce foncteur, puis d'établir le théorème de bidualité et la commutation de la dualité à l'extension des scalaires. Dans un deuxième temps, sous l'hypothèse d'existence d'un relèvement de Frobenius F, on montre la commutation des foncteurs $\mathbb{D}$ et F^* pour les $\mathcal{D}$-modules à gauche, et des foncteurs $\mathbb{D}$ et $F^!$ pour les $\mathcal{D}$-modules à droite. Un outil essentiel ici est la théorie du foncteur image inverse exceptionnelle développée par Grothendieck et Hartshorne. La troisième et dernière partie est consacrée à l'étude de la dimension cohomologique de certains $\mathcal{D}$-modules, munis d'un isomorphisme avec leur image inverse par Frobenius. Grâce au théorème de descente par Frobenius établi par Berthelot, on déduit une caractérisation homologique de l'holonomie, de la même façon qu'en caractéristique nulle.

ABSTRACT. — LOCAL DUALITY AND HOLONOMY FOR ARITHMETIC $\mathcal{D}$-MODULES. — The object of this article is the study of the duality functor $\mathbb{D}$ in the context of $\mathcal{D}$-modules developped by Berthelot in mixed characteristic. The first part consists in extracting the required structures to obtain a good definition of this functor; next we establish the biduality theorem and prove the commutation of duality to scalar extension. In the second part we show the commutation of $\mathbb{D}$ and F^* for left $\mathcal{D}$-modules and that of $\mathbb{D}$ and $F^!$ for right $\mathcal{D}$-modules, under the hypothesis of the existence of a pull-back by Frobenius F. An essential point here is the theory of exceptional inverse image functor developped by Grothendieck and Hartshorne. The third and last part consists in the study of the cohomological dimension of some $\mathcal{D}$-modules endowed with an isomorphism with their inverse image under Frobenius. Through the theorem of Frobenius descent established by Berthelot, we deduce a homological characterisation of holonomy as in characteristic zero.

(*) Texte reçu le 7 avril 1998, révisé le 19 janvier 1999, accepté le 18 juin 1999.
A. VIRRION, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes CEDEX (France). Email : anne.virrion@univ-rennes1.fr.
Classification mathématique par matières : 14F30.

Mots clés : $\mathfrak{D}$-module, dualité, holonomie, morphisme de Frobenius, dimension cohomologique.

Sommaire

Introduction

Le sujet de cet article est l'étude du foncteur de dualité locale dans le cadre de la théorie des $\mathcal{D}^{\dagger}$-modules développée par P. Berthelot [Be3] pour des variétés algébriques X sur un corps k de caractéristique p. Il s'agit d'une part de prolonger à ce contexte la théorie des $\mathcal{D}$-modules en caractéristique nulle, dans l'esprit des travaux de Bernstein [Bo1], Björk [Bj1], Kashiwara [Ka1], Malgrange [Ma1], Mebkhout [Me1], [Me2], [Me3], [Me4], Saito [Sa1], [Sa2], Schneiders [Sc1], [Sc2], [Sc3], *etc.* D'autre part, il faut s'assurer que ce foncteur est compatible aux données spécifiques à la caractéristique positive, comme le morphisme de Frobenius ou certains morphismes d'anneaux d'opérateurs différentiels qui apparaissent naturellement. On s'attachera d'abord à dégager les hypothèses et données nécessaires à une définition satisfaisante du foncteur de dualité $\mathbb{D}$ dans ce contexte. On montrera ensuite le théorème de bidualité et la compatibilité de $\mathbb{D}$ à l'extension des scalaires et à l'action de Frobenius. On étudiera enfin les propriétés cohomologiques des $\mathcal{D}^{\dagger}$-modules cohérents munis d'un Frobenius (qui généralisent la notion de F-isocristal).

Supposons X relevable en un schéma formel $\mathcal{X}$ lisse sur le spectre formel d'un anneau de valuation discrète $\mathcal{V}$, d'inégales caractéristiques $(0,p)$, de corps résiduel k, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Notons X_i sa réduction modulo l'idéal $\mathfrak{m}^{i+1}$, pour $i \geq 0$. On considère alors une famille de faisceaux d'anneaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ (resp. $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$), pour $m \geq 0$, sur $\mathcal{X}$ (resp. sur X_i), engendrés localement par un nombre fini d'opérateurs différentiels. On note $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ le complété $\mathfrak{m}$-adique de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ et par passage à la limite inductive sur m, on définit le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$. En tensorisant par $\mathbb{Q}$, on obtient l'objet central $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ de la théorie de Berthelot. C'est un faisceau d'anneaux cohérent [Be3, 3.6.1] et de dimension cohomologique finie [Be4, 4.4.7].

De façon plus générale on s'intéresse aux opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ à coefficients dans une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre $\mathcal{B}$, munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module à gauche. La principale motivation pour cette généralisation est de pouvoir utiliser ces résultats pour les faisceaux d'opérateurs différentiels à coefficients dans des algèbres de fonctions à singularités surconvergentes [Be3, 4.2]. Rappelons que ces objets apparaissent naturellement dans l'étude de la cohomologie rigide [Be2]. En effet, soit K le corps des fractions de $\mathcal{V}$, $\mathcal{X}_K$ la fibre générique de $\mathcal{X}$ au sens des espaces rigides analytiques [Ra1], et $\mathrm{sp} : \mathcal{X}_K \to \mathcal{X}$ le morphisme de spécialisation. Si Z est un diviseur de X, on définit dans [Be3] des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$ qui sont naturellement munis d'une structure de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-module à gauche. Localement, si f est une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ définissant le diviseur, $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}\{T\}/(f^{p^{m+1}}T - p)$, cet isomorphisme étant indépendant du choix de f (voir [Be3, 4.2.3]). Le faisceau des fonctions sur $\mathcal{X}$ à singularités surconvergentes le long de Z, noté $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)$, est obtenu comme limite inductive des $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$ et est par conséquent muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$-module à gauche. On considère alors le faisceau d'anneaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$, où

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}Z) = \varinjlim_{m} \big(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z) \,\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}\big)$$

(voir [Be3, 4.2.5.3]). Il est cohérent [Be3, 4.3.6], de dimension cohomologique finie [Hu1] et le foncteur sp_* transforme un isocristal surconvergent le long de Z en un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent [Be3, 4.4.3, 4.4.5]. Notons également que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module cohérent [Be7, 3.1].

Ainsi, les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres $\mathcal{B}$ introduites ici nous permettront de traiter le cas de ces anneaux d'opérateurs différentiels.

On va donc s'intéresser aux modules cohérents sur ces différents faisceaux d'anneaux. Remarquons que certains d'entre eux ne sont pas nécessairement de dimension cohomologique finie; en particulier les $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$, pour $i \geq 1$, ou les $\mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ lorsque $\mathcal{B}$ n'est pas supposé de dimension cohomologique finie.

On travaillera donc avec des complexes parfaits (voir [Il1]), les notions de perfection et de cohérence coïncidant lorsque les anneaux sont de dimension cohomologique finie.

Dans un chapitre préliminaire, on détaillera la construction de ces faisceaux d'opérateurs différentiels et on rappellera un certain nombre de définitions et de résultats dus à Berthelot et qui seront nécessaires pour la suite.

Le premier chapitre sera consacré à définir un foncteur de dualité $\mathbb{D}$ adapté à ce contexte. La théorie classique de la dualité développée par Illusie [Il1] transforme les complexes parfaits de modules à gauche en complexes parfaits de modules à droite. On supposera donc que l'on dispose d'axiomes supplémentaires, qui seront vérifiés dans les cas qui nous intéressent, permettant de définir un foncteur de dualité à valeurs dans les complexes parfaits de modules à gauche. Notons que l'on travaillera dans des catégories dérivées sur des anneaux de bimodules dont le centre ne contient pas de corps, ce qui engendre des difficultés qui n'apparaissent pas dans le cas complexe. On montrera ensuite le théorème de bidualité dans ce contexte et on vérifiera que $\mathbb{D}$ commute à l'extension des scalaires. Dans le cas d'un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, on en déduira en particulier une suite exacte des coeffcients universels [CE1].

Sous l'hypothèse d'existence d'un relèvement de Frobenius F, on montrera dans le second chapitre que $\mathbb{D}$ commute à F^*. Pour ce faire, on utilise la théorie du foncteur image inverse exceptionnelle $F^!$ developpée par Grothendieck et Hartshorne [Ha1], qui fournit une caractérisation infinitésimale des modules à droite. On montrera que les foncteurs F^* et $F^!$ sont d'une certaine manière compatibles et possèdent des propriétés de descente [Be4] similaires, propriétés qui constituent le point clé du théorème de commutation.

Supposons ici que k soit un corps parfait, que $\mathcal{V} = W(k)$ et qu'il existe un relèvement de Frobenius $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^\sigma$. Dans la théorie classique des $\mathcal{D}$-modules, on sait [Ma1] que

$$\dim \operatorname{coh}(\mathcal{D}_X) = \dim(X),$$

résultat qui repose en partie sur l'inégalité de Bernstein. De plus, tout $\mathcal{D}_X$-module cohérent admettant localement une bonne filtration, on peut définir sa variété caractéristique. On s'intéresse alors aux modules dont la variété caractéristique est de même dimension que X, les modules holonomes. Ceux-ci jouent un rôle essentiel dans cette théorie, notamment dans la correspondance de Riemann-Hilbert [Bo1].

Dans le cadre de la caractéristique p, les choses sont un peu plus compliquées. En particulier on ne dispose plus de la filtration par l'ordre sur $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, ni de l'inégalité de Bernstein modulo p, et on sait seulement que

$$\dim \operatorname{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) \leq 2\dim(\mathcal{X}) + 1.$$

On se restreint alors à la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules $\mathcal{E}$ munis d'un isomorphisme