

UNE CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES EXEMPLES DE LATTÈS DE $\mathbb{P}^k$

PAR FRANÇOIS BERTELOOT & JEAN-JACQUES LOEB

RÉSUMÉ. — Un exemple de Lattès est un endomorphisme holomorphe de l'espace projectif complexe qui se relève en une dilatation de l'espace affine de même dimension au moyen d'un revêtement ramifié sur les fibres duquel un groupe cristallographique agit transitivement. Nous montrons que tout endomorphisme holomorphe d'un espace projectif complexe dont le courant de Green est lisse et strictement positif sur un ouvert non vide est nécessairement un exemple de Lattès.

ABSTRACT (*A geometrical characterization of Lattès examples in $\mathbb{P}^k$*)

A Lattès example is an holomorphic self-map of the complex projective space which may be lift to some dilation of the affine space with same dimension by a ramified cover on which fibers a cristallographic group is acting transitively. We show that every holomorphic self-map of the complex projective space whose Green current is smooth and strictly positive on some non empty open set is a Lattès example.

1. Introduction

Les exemples de Lattès sont des fractions rationnelles induites sur la sphère de Riemann par une isogénie dilatante d'un tore complexe au moyen d'une

Texte reçu le 26 janvier 2000, accepté le 22 mai 2000

FRANÇOIS BERTELOOT, Université P. Sabatier, Toulouse III, Laboratoire É. Picard, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex (France) • *E-mail* : berteloo@picard.ups-tlse.fr

JEAN-JACQUES LOEB, Université d'Angers, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, 49045 Angers (France) • *E-mail* : loeb@tonton.univ-angers.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 32U40, 32H50.

Mots clefs. — Courant et mesure de Green, Région de Voronoi, Groupe cristallographique.

fonction elliptique. Ce sont donc clairement des exemples de fractions rationnelles dont l'ensemble de Julia remplit la sphère de Riemann ; elles sont en fait ergodiques.

De façon équivalente, on considèrera qu'un exemple de Lattès est une fraction rationnelle f faisant commuter un diagramme du type suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{D} & \mathbb{C} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

où σ est un revêtement ramifié sur les fibres duquel un groupe cristallographique agit transitivement et D une dilatation affine passant au quotient.

Dans l'exemple construit par S. Lattès [8], D est la multiplication par 2, σ la fonction de Weierstrass et le groupe cristallographique $(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \rtimes \{\text{id}, -\text{id}\}$. On trouvera la classification des exemples de Lattès dans [9]. Signalons aussi que le rôle joué par ces fractions dépasse celui de simples exemples. En effet, si ces fractions s'avéraient être les seules dont l'ensemble de Julia puisse supporter un champ de lignes mesurable invariant, alors la densité des fractions rationnelles hyperboliques serait établie (voir [11]).

Pour les espaces projectifs $\mathbb{P}^k$ de dimension quelconque, nous adopterons la définition précédente, la partie linéaire de la dilatation D étant alors le produit d'une homothétie par une transformation unitaire de $\mathbb{C}^k$. Ce choix nous semble justifié puisque nous montrons dans cet article que, comme pour $\mathbb{P}^1$ (voir [14], [2], [10]), cette définition est satisfaite par tout endomorphisme holomorphe dont le courant de Green est lisse et strictement positif sur un ouvert non vide :

THÉORÈME 1.1. — *Soit $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ un endomorphisme holomorphe de degré q dont le courant de Green T est lisse et strictement positif sur un ouvert non vide de $\mathbb{P}^k$. Il existe alors un groupe cristallographique complexe G , une application affine D de partie linéaire $\sqrt{q}U$ (U unitaire) ainsi qu'un revêtement ramifié $\sigma : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ tels que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}^k \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k \end{array}$$

et le groupe G agisse transitivement sur les fibres de σ .

Cette caractérisation s'interprète géométriquement par la sphéricité locale des surfaces de niveau de la fonction de Green dans $\mathbb{C}^{k+1}$. Une description détaillée de ces surfaces est donnée dans [2] lorsque $k = 1$.

Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la section 2, nous décrivons les notions et résultats utilisés puis exhibons des exemples de Lattès en dimension arbitraire. Dans la section 3, nous établissons une assertion quantitative de transitivité topologique pour un endomorphisme f satisfaisant nos hypothèses ; l'ingrédient essentiel étant un théorème de Fornaess et Sibony concernant l'équirépartition des orbites négatives dans le support de la mesure de Green. Dans la section 4, nous établissons le diagramme $(\sigma \circ D = f \circ \sigma)$. L'étude de l'application σ fait l'objet de la section 5. L'existence d'un groupe d'isométries G agissant transitivement sur les fibres de σ est liée au fait que σ remonte le courant de Green de f sur le courant de Kähler standard de $\mathbb{C}^k$. La co-compacité de G est déduite de la transitivité topologique au moyen de la technique des régions de Voronoï. Par le théorème de Bieberbach, G est alors un groupe cristallographique complexe.

2. Rappels et exemples

Nous commençons par un bref rappel des outils et résultats que nous utiliserons. Tout endomorphisme holomorphe f de $\mathbb{P}^k$ est induit par une application polynômiale homogène F non-dégénérée de $\mathbb{C}^{k+1}$. Nous dirons que f est de degré q si F l'est ; les fibres de f sont alors constituées de q^k points en tenant compte des multiplicités :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k \end{array}$$

Hubbard-Papadopol [7] et Fornaess-Sibony [5] ont construit un $(1,1)$ -courant positif fermé sur $\mathbb{P}^k$ dont le support est exactement l'ensemble de Julia de f , c'est-à-dire l'ensemble des points au voisinage desquels la suite des itérés de f n'est pas une famille normale. Ce courant, que nous appellerons *courant de Green de f* et noterons T , est obtenu de la façon suivante.

La fonction de Green G de f est la limite, au sens de la convergence uniforme locale sur $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$, de la suite de fonctions p.s.h

$$G_n(z) = \frac{1}{q^n} \operatorname{Log} |F^n(z)|.$$

Comme $G(\lambda z) = \operatorname{Log} |\lambda| + G(z)$, on peut définir le courant T par

$$\pi^* T = \operatorname{dd}^c G.$$

Autrement dit, $G \circ s$ est un potentiel de T pour toute section locale s de π . De $G \circ F = qG$, on déduit immédiatement que $f^* T = qT$.

Dans [6], Fornaess et Sibony montrent que la mesure $\mu := T^k$, dite *mesure de Green de f* , est une mesure de probabilité vérifiant $f^* \mu = q^k \mu$. Ils établissent

également l'existence d'un ensemble pluripolaire $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}^k$ tel que la suite de mesures

$$q^{-nk} \sum_{f^n(\beta_i)=\beta} \delta_{\beta_i}$$

converge faiblement vers la mesure de Green μ de f pour tout $\beta \in \mathbb{P}^k \setminus \mathcal{E}$.

Nous décrivons maintenant deux familles d'exemples de Lattès sur $\mathbb{P}^k$. Nous supposons, pour simplifier, que $k = 2$. Ces constructions se généralisent cependant à toute dimension.

- *Première famille d'exemples (due à T. Ueda, voir [13]).*

Soit f un exemple de Lattès de $\mathbb{P}^1$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{D} & \mathbb{C} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Par exemple, σ est obtenue en quotientant $\mathbb{C}$ par $G := (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \rtimes \{\text{id}, -\text{id}\}$ et D est la multiplication par 2.

L'endomorphisme $f \times f$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ passe au quotient lorsque l'on identifie (x, y) à (y, x) . Comme on peut le voir au moyen de l'application de Segre

$$\Phi([z_1 : w_1], [z_2 : w_2]) = [z_1 w_1 : z_2 w_2 : z_1 w_2 + z_2 w_1],$$

l'espace ainsi obtenu est isomorphe à $\mathbb{P}^2$. L'endomorphisme induit est bien un exemple de Lattès de $\mathbb{P}^2$. Le groupe cristalllographique est dans ce cas le produit d'un réseau de $\mathbb{C}^2$ par un groupe d'ordre égal à 8 : $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$.

- *Deuxième famille d'exemples*

Soit $T := \mathbb{C}/\Gamma$ un tore complexe. Nous allons réaliser $\mathbb{P}^2$ comme quotient de $T \times T$ par une action naturelle du groupe de substitutions σ_3 . Pour cela, considérons la cubique lisse $\mathcal{W}$ de $\mathbb{P}^2$ obtenue comme plongement de Weierstrass de T . Observons que l'ensemble des triplets $\{x, y, z\}$ non ordonnés alignés de $\mathcal{W}$ s'identifie à l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^2$, donc au dual de $\mathbb{P}^2$ qui est isomorphe à $\mathbb{P}^2$.

Par ailleurs, l'alignement de $\{x, y, z\}$ signifie que $x + y + z = 0$ pour la loi de groupe de la courbe elliptique. On voit alors facilement que $T \times T$ s'identifie à $\{(x, y, z) \in T \times T \times T; x + y + z = 0\}$ puis que $\mathbb{P}^2$ s'identifie au quotient de $T \times T$ par l'action naturelle de σ_3 .

On induit alors un exemple de Lattès de $\mathbb{P}^2$ à partir d'une isogénie du type $D(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ où λ est un nombre complexe tel que $\lambda\Gamma \subset \Gamma$.

$$\begin{array}{ccc} T \times T & \xrightarrow{D} & T \times T \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ T \times T / \sigma_3 = \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^2 = T \times T / \sigma_3 \end{array}$$

La différence essentielle entre ces deux familles d'exemples nous semble être la suivante. Dans le premier cas, $\mathbb{P}^2$ est obtenu en quotientant un produit de tores $T \times T$ par un groupe d'ordre 8, tandis que dans le second c'est le groupe σ_3 d'ordre 6 qui intervient. On notera également que dans le second cas, $\mathbb{P}^2$ est directement obtenu comme quotient de $T \times T$ et que l'existence d'un exemple de Lattès de $\mathbb{P}^1$ sous-jacent n'est pas évidente.

A contrario, dans ces deux types d'exemples $\mathbb{P}^2$ est obtenu à partir d'un tore produit ; nous pensons que ceci est une condition nécessaire.

3. Transitivité topologique

On démontre facilement, à l'aide du théorème de Picard, que pour toute fraction rationnelle f la réunion $\bigcup_n f^n(V)$ évite au plus deux points de la sphère de Riemann dès que V est un ouvert rencontrant l'ensemble de Julia de f . La transitivité topologique de la restriction de f à son Julia s'en déduit. Pour un endomorphisme f de $\mathbb{P}^k$, Fornæss et Sibony ont montré que l'ensemble évité est pluripolaire. Lorsque le courant de Green est lisse et strictement positif sur un ouvert U , nous en déduisons la transitivité topologique de f sur U . Cette propriété jouera un rôle important dans la suite de notre étude. Nous supposons dorénavant $\mathbb{P}^k$ muni d'une métrique Riemannienne et noterons ρ la distance associée.

PROPOSITION 3.1. — *Soit $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ un endomorphisme holomorphe de degré q dont le courant de Green T est lisse et strictement positif sur un ouvert U de $\mathbb{P}^k$. Alors, pour tout point $a \in U$ et toute boule $B(b, R)$ relativement compacte dans U , il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ de limite a , une suite de réels $(\epsilon_n)_{n \geq n_0}$ ainsi que des constantes $0 < A, C < 1$ ne dépendant que de U et f telles que*

$$(i) \quad \frac{1}{2} A q^{-\frac{1}{2}n} R \leq \epsilon_n \leq A^{-1} q^{-\frac{1}{2}n} R,$$

$$(ii) \quad B(b, CR) \subset f^n[B(a_n, \epsilon_n)] \subset B(b, R).$$

Plus généralement, pour tout compact $K \subset U$ et tout voisinage V de $a \in U$, $f^n(V)$ contient K dès que n est assez grand et f^n est localement inversible en tout point de $V \cap (f^n)^{-1}(K)$.