

## TRIPLETS SPECTRAUX POUR LES VARIÉTÉS À SINGULARITÉ CONIQUE ISOLÉE

PAR JEAN-MARIE LESCURE

---

RÉSUMÉ. — Sur une pseudo-variété de dimension paire à une singularité conique isolée, des triplets spectraux sont construits à partir d'une classe d'opérateurs différentiels elliptiques de type Fuchs, contenant les opérateurs de Dirac à coefficients dans des fibrés plats dans la direction radiale. Ces derniers engendrent, sous une hypothèse raisonnable, le groupe de  $K$ -homologie pair tensorisé par  $\mathbb{C}$  de la pseudo-variété et leur caractère de Chern est calculé.

ABSTRACT (*Spectral triples for pseudomanifolds with isolated singularity*)

We use elliptic operators of Fuchs type on an even dimensional pseudomanifold with an isolated singularity to construct spectral triples. This class of operators includes Dirac operators with coefficients in flat bundles in the radial direction and, under some hypothesis, these operators generate the even  $K$ -homology group tensorised by  $\mathbb{C}$  of the pseudomanifold. Moreover, their Chern character is computed.

### Table des matières

1. Introduction.....	594
2. Triplets spectraux.....	596
3. Pseudo-variétés à une singularité conique.....	598
4. Exemples de triplets spectraux.....	605
5. Calcul du caractère de Chern.....	616
Bibliographie.....	622

---

*Texte reçu le 7 avril 2000, révisé le 25 janvier 2001 et le 13 juin 2001*

JEAN-MARIE LESCURE, Département de Mathématiques, Université Blaise Pascal, Complexe universitaire des Cézeaux, 63177 Aubière CEDEX

*E-mail* : [lescure@math.univ-bpclermont.fr](mailto:lescure@math.univ-bpclermont.fr)

Classification mathématique par sujets (2000). — 19D55, 58J42.

Mots clefs. — Formule locale de l'indice, variétés singulières.

## 1. Introduction

Le théorème de l'indice de M.F. Atiyah et I.M. Singer figure parmi les résultats fondamentaux de ces dernières décennies. Il rencontre de nombreux champs de recherches, et a fait l'objet de nombreuses généralisations.

Un des aspects fondamentaux de la géométrie non commutative est le calcul du caractère de Chern des  $K$ -cycles, ce qui correspond à un problème de l'indice généralisé. En effet, un  $K$ -cycle  $(D, \mathcal{H})$  sur une  $(\mathbb{C})$ -algèbre  $\mathcal{A}$  induit une application dite *indice analytique* :

$$\mathrm{Ind}_D : K_j(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

où  $j$  dépend de la parité du  $K$ -cycle. Pour calculer cette application, A. Connes a introduit la cohomologie cyclique  $HC^*(\mathcal{A})$ , réceptacle naturel du caractère de Chern  $\mathrm{Ch}^j(D)$  qu'il définit de sorte que

$$\mathrm{Ind}_D([e]) = \langle \mathrm{Ch}^j(D); [e] \rangle,$$

où  $\langle , \rangle$  est un pairing naturel entre la cohomologie cyclique et la  $K$ -théorie. Le terme de droite est une formule *cohomologique* pour l'indice analytique et est un substitut de l'indice topologique de M. Atiyah et I. Singer. Une première formule explicite du caractère de Chern des  $K$ -cycles apparaît dans [11].

En 1995, A. Connes et H. Moscovici établissent dans [14] une nouvelle formule pour le caractère de Chern de certains  $K$ -cycles, qu'ils appellent des *triplets spectraux*. Leur travail comporte deux parties. Dans la première, ils définissent les *triplets spectraux* comme étant des  $K$ -cycles  $(\mathcal{D}, \mathcal{H})$  sur l'algèbre  $\mathcal{A}$  tels que les fonctions  $z \mapsto \mathrm{Tr}(b|\mathcal{D}|^z)$  aient un bon prolongement méromorphe à  $\mathbb{C}$ , où  $b$  est dans une algèbre  $\mathcal{B}$  contenant  $\mathcal{A}$  et stable par certains commutateurs. Cette notion est beaucoup plus fine et restrictive que celle de  $K$ -cycle [11], [12]. En contrepartie, ils obtiennent une formule « locale » du caractère de Chern sous la forme d'un cocycle du  $(b, B)$ -bicomplexe de  $\mathcal{A}$ . Rappelons que la cohomologie de ce bicomplexe est la cohomologie cyclique (périodique) de  $\mathcal{A}$ . Contrairement aux formules antérieures, définies comme des traces de produit d'opérateurs, donc d'intégrales de quantités non locales, leur formule est basée sur des résidus de fonctions méromorphes qui généralisent le résidu de Wodzicki et qui sont des intégrales de quantités locales.

A. Connes et H. Moscovici traitent dans leur article [14] le cas des feuilletages et mentionnent dans l'introduction, parmi les exemples possibles, le cas des variétés à singularités coniques.

C'est cet exemple que nous traitons dans ce travail. Avant d'expliquer plus en détail le contenu, il est utile de comparer l'approche de A. Connes et H. Moscovici et celle de J. Cheeger, J. Brüning et R. Seeley.

Le travail de A. Connes et H. Moscovici fournit un cadre et une réponse généraux, pour le problème de l'indice en géométrie non commutative. Cette réponse donne plus que l'indice du  $K$ -cycle. En effet, le caractère de Chern

donne l'indice de tous les  $K$ -cycles résultant du pairing entre la  $K$ -homologie et la  $K$ -théorie; une bonne idée de ce pairing est donnée (dans la cas d'une variété) par l'indice des opérateurs elliptiques à coefficients dans des fibrés, les opérateurs elliptiques étant les cycles de la  $K$ -homologie et les fibrés les cycles de la  $K$ -théorie. On peut aussi noter que le caractère de Chern est une classe de cohomologie cyclique dont la composante de degré 0 correspond à l'indice du  $K$ -cycle.

J. Cheeger, J. Brüning et R. Seeley, M. Lesch, ont établi des formules de l'indice pour une large classe d'opérateurs elliptiques sur les variétés singulières. Ils étudient les propriétés de Fredholm de certaines extensions auto-adjointes, construisent les noyaux de la chaleur et les résolvantes correspondants, puis obtiennent les développements asymptotiques de leur trace. Ces développements ne résultent pas de l'intégration des développements ponctuels comme dans la cas des variétés compactes sans bord : les coefficients du développement asymptotique ponctuel du noyau de la chaleur ne sont pas tous intégrables. Aussi, ils établissent et utilisent des lemmes de « développements asymptotiques singuliers » (S.A.L. [5], [22]) comportant une régularisation des intégrales divergentes.

Prouver que des  $K$ -cycles sont des triplets spectraux nécessite dans chaque cas des méthodes spécifiques et pour le cas des variétés singulières, les travaux de [9], [6], [4] sont pertinents, ce qui est d'ailleurs noté dans l'introduction de [14].

Le présent travail met donc en évidence la complémentarité entre l'approche de A. Connes-H. Moscovici et celle de J. Cheeger J. Brüning, R. Seeley et M. Lesch : partant du travail de ces derniers, on peut construire des triplets spectraux, puis calculer leur caractère de Chern à l'aide du travail de A. Connes et H. Moscovici. Cela donne par exemple des informations sur la  $K$ -homologie : on montre que la  $K$ -homologie sans torsion (des variétés à singularités coniques) est obtenue à l'aide des opérateurs de Dirac à coefficients.

Nous terminons cette introduction par un rapide résumé de l'article. Nous construisons des triplets spectraux à partir d'extensions auto-adjointes d'opérateurs différentiels de Fuchs elliptiques définis sur la partie lisse  $X$  d'une pseudo-variété compacte à une singularité conique  $X^c$ . Ils forment une classe naturelle et ont été largement étudiés [8], [9], [6], [22], [4], [27]. En particulier les opérateurs géométriques associés à un métrique *conique* sont de ce type.

Pour prouver l'existence des prolongements méromorphes requis, nous séparons ce qui vient de la partie lisse et ce qui vient de la singularité. Cette dernière contribution est traitée à l'aide de résultats techniques découlant d'un plongement de Sobolev à poids. C'est une approche directe et en grande partie auto-contenue, mais nous aurions pu aussi utiliser [4], ou encore [17].

Parmi les triplets spectraux obtenus figurent ceux provenant des opérateurs de Dirac à coefficients dans des fibrés munis d'une structure produit sur le

bout cylindrique de la variété  $X$ . Nous calculons explicitement leur caractère de Chern à partir de la formule de Connes-Moscovici. Le travail de [6], [22] donne la composante de degré 0 du cocycle et pour les composantes en degré positif, nous utilisons le calcul de E. Getzler [16], [13], [2] après nous être ramené au cas d'une variété compacte à l'aide d'une « excision » des contributions singulières. Nous montrons ensuite, c'est une conséquence des formules établies, que nous avons ainsi suffisamment de  $K$ -cycles pour engendrer la partie sans torsion de la  $K$ -homologie de  $X^c$ .

L'algèbre  $\mathcal{A}$  choisie est l'algèbre des fonctions  $C^\infty$  sur la partie lisse  $X$  de  $X^c$  et constantes près de la singularité. Ce choix a plusieurs avantages. Tout d'abord, l'algèbre  $\mathcal{A}$  est suffisamment grande : elle est dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe dans  $C(X^c)$  (les fonctions continues sur  $X^c$ ), donc a même  $K$ -théorie que  $C(X^c)$ . De même, nous établissons que sa cohomologie cyclique est isomorphe à l'homologie usuelle de  $X^c$ . Ensuite, elle est suffisamment petite : dès qu'apparaît une dérivation ou un commutateur dans les calculs, on est ramené à un travail sur une partie compacte de  $X$ , où les choses sont plus classiques. En outre, la structure particulière de cette algèbre autorise la séparation en contribution des parties régulières et singulières et « l'excision » de la singularité dont nous avons parlé plus haut. Enfin, elle admet des généralisations naturelles à des stratifications plus complexes (les constantes devenant des fonctions  $C^\infty$  sur les strates...), pour lesquelles nous espérons tirer partie des avantages décrits ci-dessus dans un travail à venir. Dans un souci de brièveté, certaines preuves techniques ont été omises. Cela ne devrait pas entraver la compréhension de l'article, toutefois, le lecteur peut consulter ces preuves dans [23].

Nous terminons en citant les articles de H. Moscovici et F. Wu [25] et de S. Chan [7] où des formules du caractère de Chern de l'opérateur de la signature d'une pseudo-variété sont données. Leurs méthodes et les opérateurs considérés sont différents et ils ne font pas usage de la formule locale de l'indice.

## 2. Triplets spectraux

Soient  $\mathcal{A}$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre involutive,  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert,  $\rho$  une représentation de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{D}$  un opérateur auto-adjoint non borné sur  $\mathcal{H}$ . On dit que  $(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \rho)$  est un *module de Fredholm non borné* ou un  *$K$ -cycle* sur  $\mathcal{A}$  si :

$$(1) \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad [\mathcal{D}, \rho(a)] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

$$(2) \quad (1 + \mathcal{D}^2)^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Nous avons noté ci-dessus  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  la  $C^*$ -algèbre des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  celle des opérateurs compacts. Le  $K$ -cycle est  $p$ -sommable si  $(1 + \mathcal{D}^2)^{-1} \in \mathcal{L}_p(\mathcal{H})$ , où  $\mathcal{L}_p(\mathcal{H})$  est le  $p$ -ième idéal de Schatten. Le module est pair si  $\mathcal{H}$  est  $\mathbb{Z}_2$  gradué et  $\mathcal{D}$  est de degré 1 tandis que  $\rho$  est de degré 0 ( $\mathcal{A}$  ayant

par défaut la  $\mathbb{Z}_2$ -graduation triviale). L'application  $\rho$  sera généralement omise dans les notations. Le lecteur intéressé par la géométrie non commutative pourra consulter, entre autres, les références suivantes : [12], [29], [19], [1].

La sommabilité d'un  $K$ -cycle correspond à sa dimension en tant que cycle de la  $K$ -homologie. Les notions de spectre des dimensions et de triplet spectral dues à A. Connes et H. Moscovici [14] et rappelées ci-dessous, précisent les composantes du  $K$ -cycle en deçà de cette dimension maximale.

Soit  $\mathcal{D}$  un opérateur non borné auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$ . Nous noterons  $\delta_{\mathcal{D}}$  (et souvent simplement  $\delta$ ), l'opérateur non borné sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  suivant :

$$\delta_{\mathcal{D}}(T) := [|\mathcal{D}|, T].$$

DÉFINITION 2.1 (voir [14]). — Un *triplet spectral* est un  $K$ -cycle  $(\mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{A})$   $p$ -sommable sur  $\mathcal{A}$  tel que

$$(C_1) \quad \mathcal{A} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom } \delta_{\mathcal{D}}^n,$$

et tel qu'il existe une partie discrète  $Sd \subset \mathbb{C}$  telle que pour tout élément de l'algèbre  $\mathcal{B}$  engendrée par  $\{\delta^n(a); a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}\}$ , la fonction suivante

$$(C_2) \quad h_b : z \mapsto \text{tr}(b|\mathcal{D}|^{-z}),$$

admet un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C} \setminus Sd$  avec pôles de multiplicité finie.  $Sd$  est appelé le spectre des dimensions. La borne supérieure des multiplicités des pôles est appelée multiplicité du spectre des dimensions.

En fait, on peut vérifier que la condition  $(C_1)$  est équivalente à

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad |\mathcal{D}|^{-p} \nabla^{p+q}(a) |\mathcal{D}|^{-q} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

où on a posé  $\nabla(a) = [\mathcal{D}^2, a]$ . A. Connes et H. Moscovici ont établi, à partir de l'expression donnée dans [18], une formule du caractère de Chern des triplets spectraux. On la rappelle dans le cas pair :

THÉORÈME 2.2 (voir [14]). — Soit  $(\mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{A})$  un triplet spectral pair. Son caractère de Chern est représenté par le cocycle  $(\varphi_n)_{n \in 2\mathbb{N}}$  du  $(b, B)$ -bicomplexe de l'algèbre  $\mathcal{A}$  suivant :

- Pour  $n > 0$ ,

$$(3) \quad \varphi_n(a_0, \dots, a_n) = \sum_{\substack{k=(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \\ q \in \mathbb{N}}} \sigma_{k,q,n} \tau_q(\gamma a_0 (da_1)^{(k_1)} \dots (da_n)^{(k_n)} |\mathcal{D}|^{-(2|k|+n)}),$$

où  $\gamma$  est l'opérateur de graduation,  $da = [\mathcal{D}, a]$ ,  $\nabla(a) = [\mathcal{D}^2, a]$ ,  $\tau_q(P)$  est le résidu en 0 de la fonction  $z^q \text{Tr}(P|\mathcal{D}|^{-2z})$  et  $|k| = \sum_{i=1}^n k_i$ . Les coefficients  $\sigma_{k,q,n}$  sont des rationnels et seul un nombre fini d'entre eux sont non nuls.