Bull. Soc. math. France
130 (2), 2002, p. 169–209

PROBLÈME DE PLATEAU COMPLEXE DANS LES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

PAR FRÉDÉRIC SARKIS

RÉSUMÉ. — L'étude du « problème de Plateau complexe » (ou « problème du bord ») dans une variété complexe X consiste à caractériser les sous-variétés réelles Γ de X qui sont le bord de sous-ensembles analytiques de $X\backslash\Gamma$. Notre principal résultat traite le cas $X = U \times \omega$ où U est une variété complexe connexe et ω est une variété kählérienne disque convexe. Comme conséquence, nous obtenons des résultats de Harvey-Lawson [19], Dolbeault-Henkin [12] et Dinh [10]. Nous obtenons aussi une généralisation des théorèmes de Hartogs-Levi et Hartogs-Bochner. Finalement, nous montrons qu'une structure CR strictement pseudo-convexe plongeable dans une variété kählérienne disque-convexe est plongeable dans $\mathbb{C}^n$ si et seulement si elle admet une fonction CR non constante.

ABSTRACT (*Complex Plateau problem in Kähler manifolds*). — The "complex Plateau problem" (or "boundary problem") in a complex manifold X is the problem of characterizing the real submanifolds Γ of X which are boundaries of analytic subvarieties of $X\backslash\Gamma$. Our principal result treats the case $X = U \times \omega$ where U is a connected complex manifold and ω is a disk-convex Kähler manifold. As a consequence, we obtain results of Harvey-Lawson [19], Dolbeault-Henkin [12] and Dinh [10]. We also give a generalization of Hartogs-Levi and Hartogs-Bochner theorems. Finally, we prove that a strictly pseudoconvex CR structure embeddable in a disk-convex Kähler manifold is embeddable in $\mathbb{C}^n$ if and only if it has a non constant CR function.

Texte reçu le 23 septembre 1999, révisé le 28 novembre 2000, accepté le 4 mai 2001

FRÉDÉRIC SARKIS, Laboratoire de Géométrie, Analyse, Topologie, Université de Lille I, USTL, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France) • *E-mail :* sarkis@agat.univ-lille1.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 32F25, 32F40, 32D15, 32C30.

Mots clefs. — Problème du bord, problème de Plateau complexe, variété kählérienne, extension du type Hartogs, plongement CR, structure CR.

1. Introduction

L'étude du « problème de Plateau complexe » (ou « problème du bord ») dans une variété complexe X consiste à caractériser les sous-variétés réelles Γ de X qui sont le bord (au sens des courants) de sous-ensembles analytiques de $X\backslash\Gamma$.

Dans l'espace affine, les courbes bords de surfaces de Riemann sont caractérisées par une condition intégrale nommée « condition des moments » (voir [39], [37], [1], [28], [8]). Les sous-variétés réelles compactes, fermées et de dimension supérieure ou égale à trois qui sont bords d'ensembles analytiques de $\mathbb{C}^n$ sont celles dont la dimension de l'espace complexe tangent est maximale en chaque point (voir [18], [7], [8]).

Dans l'espace projectif, sous la condition précédente, le problème du bord n'admet pas toujours de solution. Harvey et Lawson [19] ont cependant donné une caractérisation en terme de condition des moments pour le problème du bord dans $P_n(\mathbb{C})\backslash P_{n-p}(\mathbb{C})$ (où $2p-1$ (avec $p \geq 2$) est la dimension de la variété considérée).

Récemment, Dolbeault et Henkin [12] (puis Dinh [8], [10]) ont donné une condition nécessaire et suffisante : le problème du bord pour une variété maximalement complexe $M \subset P_n(\mathbb{C})$ admet une solution s'il en admet une pour un nombre « assez grand » de tranches de M par des sous-espaces linéaires.

Le but de cet article est de généraliser ce dernier résultat à une variété produit $U \times \omega$ où U est une variété complexe connexe et ω est une variété kählérienne compacte (ou plus généralement disque convexe). L'étude du problème du bord dans les espaces produits n'est pas restrictive. En effet, le problème du bord dans l'espace projectif peut toujours être réduit à l'étude du problème du bord dans un espace produit. Comme nous le verrons, la réciproque n'est en général pas vraie. De plus, cette résolution parait la plus adaptée pour l'étude de l'extension des applications CR car si f est une application CR, le graphe de f est naturellement dans un espace produit. Soit X une variété kählérienne disque convexe ; nous obtenons alors les corollaires suivants :

1) Une nouvelle démonstration de la caractérisation géométrique du problème du bord dans $P_n(\mathbb{C})$ donnée dans [12], [10].

2) Une généralisation du théorème de Hartogs-Levi pour les applications méromorphes à valeurs dans X. En particulier, nous retrouvons les généralisations données dans [10] et [22].

3) Une généralisation du théorème de Hartogs-Bochner pour les applications CR à valeurs dans une variété kählérienne disque convexe X (pour $X = P_n(\mathbb{C})$, nous retrouvons des résultats de [12], [30], [33]).

4) La généralisation suivante du théorème de Hartogs-Bochner : supposons que X est une variété kählérienne de dimension 2 ne contenant aucune surface de Riemann compacte. Soit M une hypersurface réelle compacte et connexe de X la séparant en deux composantes connexes Ω_1 et Ω_2. Alors toute fonction

holomorphe au voisinage de M admet une extension holomorphe sur Ω_1 ou sur Ω_2. De plus, on peut choisir l'ouvert indépendant de la fonction.

Ainsi que le corollaire principal suivant nouveau même dans le cas où $X = P_n(\mathbb{C})$:

5) Soit M une structure CR abstraite, strictement pseudoconvexe de dimension $2p-1$ ($p \geq 2$) et plongeable dans X. La variété M est plongeable dans $\mathbb{C}^n$ (ou de manière équivalente, admet une solution au problème du bord dans X) si et seulement si elle admet une fonction CR non constante.

Ce dernier résultat donne une nouvelle réduction du problème suivant (voir [12]) : *Soit M une variété strictement pseudoconvexe de $P_n(\mathbb{C})$ de dimension $2p-1$ ($p \geq 2$). La variété M est-elle toujours le bord d'une p-chaîne holomorphe* (*ou de manière équivalente M est elle plongeable dans l'espace affine*) *?* En particulier, cela prouve de manière immédiate que les exemples de structures CR d'Andreotti-Rossi [31], [32], [3], [16], [13] et de Barrett [4] (cas où l'espace des fonctions CR est de dimension 1) ne sont plongeables dans aucune variété kählérienne disque convexe X. En effet, ces variétés ne sont pas plongeables dans l'espace affine mais, par construction, elles admettent des fonctions CR non constantes, on en déduit alors directement qu'elles ne sont pas plongeables dans X (pour $X = P_n(\mathbb{C})$ et M la structure CR d'Andreotti-Rossi, ceci est démontré de manière différente dans [33]).

Dans toute la suite, les variétés considérées sont supposées dénombrables à l'infini et munies d'une métrique complète. Par *volume p-dimensionnel*, nous entendrons la mesure de Hausdorff de dimension p associée à cette métrique. Nous nous intéresserons à montrer que certains compacts sont de volume p-dimensionnel fini ou nul. Or ces deux notions ne dépendent pas de la métrique choisie. Par conséquent tous les résultats que nous obtenons sont indépendants de la métrique fixée au départ.

Je voudrais remercier T.C. Dinh pour ses remarques sur cet article.

2. Problème du bord dans les variétés produit : cas lisse

2.1. Théorème principal. — Dans le même esprit que [23], nous définissons :

DÉFINITION 2.1. — Nous dirons qu'une variété complexe ω est *disque convexe* si pour tout compact $K \subset \omega$, il existe un compact $\widehat{K} \subset \omega$ tel que tout ensemble analytique A irréductible et de dimension 1 de $\omega \backslash K$ tel que $A \cup K$ est un compact de ω et $\overline{A} \cap K \neq \varnothing$ vérifie $A \subset \widehat{K}$.

Bien sûr, toute variété compacte ou holomorphiquement convexe est disque convexe.

Nous rappelons qu'une sous-variété lisse Γ de dimension $2n-1$ d'une variété complexe X est maximalement complexe si pour tout point $x \in \Gamma$, l'espace holomorphe tangent $H_x(\Gamma) = T_x(\Gamma) \cap JT_x(\Gamma)$ est de dimension complexe $n-1$ (où $T_x(\Gamma)$ est l'espace réel tangent à Γ au point x et J est la multiplication complexe).

Définition 2.2. — Soit U une variété complexe. Un sous-ensemble $K \subset U$ sera dit $(n-1)$-*générique* s'il n'est pas inclus dans une réunion dénombrable d'ensembles analytiques de dimension $n-1$ immergés dans U.

- Soit X un espace complexe (muni d'une métrique). On appelle *p-chaîne holomorphe de X* toute somme localement finie

$$[T] = \sum n_j [V_j]$$

à coefficients n_j dans $\mathbb{Z}$ de sous-ensembles analytiques V_j, deux à deux différents, de dimension p et fermés de X.

- On appelle *volume de* $[T]$, l'expression

$$\mathrm{Vol}[T] = \sum |n_j| \operatorname{Vol} V_j$$

où $\operatorname{Vol} V_j$ est le volume $2p$-dimensionnel de l'ensemble analytique V_j ; $\mathrm{Vol}[T]$ est aussi la masse du courant $[T]$. On notera T le support de la p-chaîne holomorphe $[T]$ (*i.e.* $T = \bigcup_{\{j;n_j\neq 0\}} V_j$). Dans la suite, si $[T]$ est un courant, on notera $\mathrm{Vol}[T]$ la masse de ce courant et T son support.

Soient M et N des variétés réelles lisses orientées et $f : M \to N$ une application lisse. Alors, d'après le théorème de Sard, pour presque tout $y \in N$, la tranche $f^{-1}(y)$ est soit vide soit une sous-variété lisse orientée de M de codimension $\dim N$. Nous noterons $[M, f, y]$ le courant d'intégration sur cette tranche qui est alors bien défini.

Théorème 2.3. — *Soient U une variété complexe connexe de dimension complexe n et ω une variété kählérienne disque convexe. Soit Γ une sous-variété lisse maximalement complexe de $U \times \omega$ et de dimension réelle $2n+1$. Notons $\pi : U \times \omega \to U$ la projection canonique sur le premier membre. Supposons de plus que Γ vérifie les propriétés suivantes :*

(a) *Pour tout compact $K \subset U$, $\Gamma \cap \pi^{-1}(K)$ est un compact de $U \times \omega$.*

(b) *Pour tout $z \in U$, il existe au plus un nombre fini de points x de $\gamma_z = \Gamma \cap \{z\} \times \omega$ tels que Γ ne soit pas transverse à $\{z\} \times \omega$ au point x.*

(c) *Pour tout $z \in U$, γ_z est une courbe lisse par morceaux dont la partie régulière admet un nombre fini de composantes connexes.*

Pour tout $z \in U$, le courant d'intégration sur γ_z est alors bien défini et est noté $[\gamma_z]$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1) *Il existe un sous-ensemble* $(n-1)$*-générique* Z *de* U *tel que pour tout* $z \in Z$*, il existe une* 1*-chaîne holomorphe* $[S_z]$ *de* $(\{z\} \times \omega)\backslash\gamma_z$ *de masse finie, dont l'adhérence* $\overline{S}_z$ *est un compact de* $\{z\} \times \omega$ *et telle que* $d[S_z] = [\gamma_z]$ *(au sens des courants).*

2) *Il existe un ouvert non vide* $O \subset U$ *tel que* $[\Gamma]$ *admette une solution au problème du bord dans* $O \times \omega$ *(i.e. il existe une* $(n+1)$*-chaîne holomorphe* $[T]$ *de* $(O \times \omega)\backslash\Gamma$*, de masse localement finie dans* $O \times \omega$*, telle que pour tout compact* $K \subset O$*,* $\overline{T} \cap \pi^{-1}(K)$ *est un compact de* $O \times \omega$ *et telle que* $d[T] = [\Gamma]$ *au sens des courants).*

3) *Il existe un ensemble* $F \subset U$ *de mesure de Hausdorff* $(2n-1)$*-dimensionnelle nulle de sorte que pour tout point* $z \in U\backslash F$*, il existe un ouvert* $O_z \subset U$ *tel que* $[\Gamma]$ *admette une solution au problème du bord dans* $O_z \times \omega$*.*

4) *Il existe un fermé* $Y \subset U$ *de mesure de Hausdorff* $2n$*-dimensionnelle nulle tel que* $[\Gamma]$ *admette une solution au problème du bord dans* $(U\backslash Y) \times \omega$*.*

Par définition de courbes lisses par morceaux, les hypothèses du théorème impliquent que les courbes γ_z considérées sont de longeur finie.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des variétés de Stein, il n'existe pas généralement de solution globale au problème du bord dans $U \times \omega$ comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1. — Soient

$$C(1,3) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ 1 < |z| < 3\}, \quad C(2) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 2\}$$

et $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ définie par $\phi(z) = (z, \mathrm{e}^{1/z})$. Soient

$$S = \phi\big(C(1,3)\big), \quad \gamma = \phi\big(C(2)\big) \quad \text{et} \quad \Gamma = \gamma \times P_1(\mathbb{C}).$$

Soit $\widetilde{\Gamma}$ une petite déformation de Γ dans $S \times P_1(\mathbb{C})$ obtenue grâce à la proposition 2.4. Puisque $\widetilde{\Gamma}$ est une hypersurface de $S \times P_1(\mathbb{C})$, elle vérifie l'hypothèse du théorème 2.3. Alors $[\widetilde{\Gamma}]$ n'admet pas de solution au problème du bord dans $S \times P_1(\mathbb{C})$. En effet, si c'était le cas γ en admettrait une aussi et donc la fonction $\mathrm{e}^{1/z}$ admettrait une extension holomorphe au disque unité, ce qui est impossible.

Il est bien sûr nécessaire d'avoir une condition de transversalité de Γ par rapport aux fibres du produit. En effet, si Γ est entièrement incluse dans l'une des fibres du produit on ne peut rien conclure. Les conditions de transversalité b) et c) supposées dans le théorème sont en fait générique. D'après le théorème de Morse (voir par exemple [21]), toute fonction lisse $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ admet une déformation dont les singularités sont non dégénérées. Dans le cas d'un application à valeurs dans $\mathbb{R}^\ell$, ceci est encore valide. En particulier, si $\ell = k-1$ nous obtenons la proposition suivante :