*Bull. Soc. math. France*
**130** (2), 2002, p. 233–251

# OPÉRADES DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES SUR LES SIMPLEXES ET LES PERMUTOÈDRES

PAR FRÉDÉRIC CHAPOTON

RÉSUMÉ. — On définit plusieurs opérades différentielles graduées, dont certaines en relation avec des familles de polytopes : les simplexes et les permutoèdres. On obtient également une présentation de l'opérade $K$ liée aux associaèdres introduite dans un article antérieur.

ABSTRACT (*Differential graded operads related to simplices and permutohedra*)
We define several differential graded operads, some of them being related to families of polytopes : simplices and permutohedra. We also obtain a presentation by generators and relations of the operad $K$ on associahedra introduced in a previous article.

## Introduction

Les algèbres associatives commutatives, les algèbres associatives et les algèbres de Lie font partie du paysage mathématique depuis longtemps.

Plus récemment sont apparues les algèbres de Leibniz, les digèbres, les algèbres dendriformes et les algèbres zinbiel, toutes introduites par Loday avec des motivations en K-théorie, voir [5], [6], [7], [8].

*Texte reçu le 28 février 2001, révisé le 18 octobre 2001, accepté le 9 novembre 2001*

FRÉDÉRIC CHAPOTON, LACIM, Université du Québec à Montréal, CP 8888 succ. centre ville, Montréal Québec H3C 3P8, (Canada) • *E-mail :* chapoton@lacim.uqam.ca

Classification mathématique par sujets (2000). — 18D50, 52B11, 17A32, 17D25.

Mots clefs. — Opérades, permutoèdres, simplexes, associaèdres, algèbres pré-Lie, algèbres dendriformes, algèbres de Leibniz.

Ces types d'algèbres s'organisent en un diagramme d'opérades, qui se complète par les algèbres permutatives et les algèbres pré-Lie(1), voir [1], [3].

Par ailleurs, la relation entre l'opérade des algèbres dendriformes et les sommets des polytopes de Stasheff mène à la définition d'une opérade différentielle graduée $K$ sur toutes les faces des polytopes de Stasheff [2]. La place que prend cette opérade parmi les précédentes incite à compléter encore le diagramme, ce que nous faisons ici.

On va définir les seconde et quatrième lignes du diagramme commutatif suivant, où les flèches marquées *q.i.* sont des quasi-isomorphismes.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Zin} & \mathrm{Dend} \arrow[l, two heads] & \mathrm{PreLie} \arrow[l] \\
\Pi \arrow[u, two heads] & K \arrow[l, two heads] \arrow[u, two heads] & \Lambda \arrow[l] \arrow[u, two heads] \\
\mathrm{Com} \arrow[u, "q.i."] & \mathrm{As} \arrow[l, two heads] \arrow[u, "q.i."] & \mathrm{Lie} \arrow[l] \arrow[u] \\
\mathrm{Pasc} \arrow[u, two heads, "q.i."] & \mathrm{Trias} \arrow[l, two heads] \arrow[u, two heads, "q.i."] & \amalg \arrow[l] \arrow[u, two heads, "q.i."] \\
\mathrm{Perm} \arrow[u] & \mathrm{Dias} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & \mathrm{Leib} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

La symétrie centrale de ce diagramme correspond à la dualité quadratique des opérades quadratiques binaires.

L'opérade $K$ a été définie dans la première partie de [2] ; elle est en relation avec les associaèdres. Ici, on commence par définir deux opérades $\Pi$ (faisant intervenir les permutoèdres) et Pasc (liée aux simplexes). On donne ensuite une présentation par générateurs et relations de ces opérades, qui montre en particulier que ces trois opérades sont quadratiques binaires. Les résultats de Markl [10] sur les lois distributives permettent de démontrer que $\Pi$ est de Koszul.

On donne ensuite une présentation des opérades $\amalg$, $\Lambda$ et Trias, duales quadratiques des précédentes au sens de Ginzburg et Kapranov [4]. L'opérade Trias provient d'une opérade non-symétrique Trias′. On démontre que Trias′ est isomorphe à l'opérade Pasc vue comme opérade non-symétrique.

Durant la préparation de cet article, j'ai reçu une note de Loday et Ronco [9] annonçant des résultats similaires pour des variantes non-graduées des opérades $K$ et Trias.

(1) Aussi connues sous le nom d'algèbres symétriques à gauche.

## 1. Opérade Π

On se place dans toute la suite de l'article dans la catégorie monoïdale symétrique des complexes de $\mathbb{Z}$-modules.

On définit une opérade différentielle graduée Π. Les complexes sous-jacents sont les complexes de cochaînes cellulaires des permutoèdres.

**1.1. Complexes sous-jacents.** — Soit $I$ un ensemble fini. On note $\Pi(I)$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les expressions de la forme $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_p$, où $\pi_j = i_{j,1} \wedge \cdots \wedge i_{j,p_j}$ avec $i_{j,k} \in I$ et où chaque élément de $I$ apparaît dans un certain $\pi_j$ et un seul, modulo les relations d'antisymétrie des produits extérieurs. Ces expressions correspondent à des partitions ordonnées de $I$, en bijection avec les faces du permutoèdre correspondant à $I$.

Si $\pi_j = i_{j,1} \wedge \cdots \wedge i_{j,p_j}$, on appelle dimension de $\pi_j$, l'entier $p_j - 1$, noté $\dim(\pi_j)$. On munit $\Pi(I)$ de la graduation par la dimension en posant, si $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_p$,

$$\dim(\pi) = \sum_{j=1}^{p} \dim(\pi_j),$$

et d'une différentielle $d$ de degré $+1$ définie par la formule suivante :

$$(2) \qquad d(\pi) = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{\dim(\pi_1)+\cdots+\dim(\pi_j)} \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_j \wedge \pi_{j+1} \otimes \cdots \otimes \pi_p.$$

On vérifie sans difficulté que $d$ est de carré nul.

**1.2. Composition de l'opérade.** — Soient $I$ et $J$ deux ensembles finis et $i \in I$. Soient $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_p \in \Pi(I)$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_q \in \Pi(J)$. On va définir la composition $\pi \circ_i \mu$, appartenant à $\Pi(I \setminus \{i\} \sqcup J)$. Soit $\ell$ l'unique indice tel que $i$ apparaît dans $\pi_\ell$. Quitte à changer de signe, on peut supposer que $\pi_\ell = \pi'_\ell \wedge i$, avec la convention que, si $\pi_\ell = i$, alors $\pi'_\ell \wedge \nu = \nu$ pour tout $\nu$.

On pose alors

$$(3) \quad \pi \circ_i \mu = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_{\ell-1} \otimes \pi'_\ell \wedge \mu_1 \otimes \sigma(\pi_{\ell+1} \otimes \cdots \otimes \pi_p \, , \, \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_q),$$

où $\sigma$ décrit les battages de $\pi_{\ell+1}, \ldots, \pi_p$ avec $\mu_2, \ldots, \mu_q$, $\sigma(\cdots)$ est le produit tensoriel de $\pi_{\ell+1}, \ldots, \pi_p, \mu_2, \ldots, \mu_q$ dans l'ordre spécifié par $\sigma$ et $\epsilon(\sigma)$ désigne le signe obtenu par la règle de Koszul (en utilisant la volte graduée par la dimension) pour passer de $\pi_{\ell+1} \otimes \cdots \otimes \pi_p \otimes \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_q$ à $\mu_1 \otimes \sigma(\pi_{\ell+1} \otimes \cdots \otimes \pi_p \, , \, \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_q)$.

Proposition 1. — Π *est une opérade différentielle graduée.*

*Démonstration.* — L'élément 1 de $\Pi(\{1\})$ est une unité. La preuve que la composition est un morphisme de complexes est un calcul long mais sans difficulté, de même que celle de l'associativité. L'équivariance, i.e. la fonctorialité de la définition sur le groupoïde des ensembles finis, est immédiate. $\square$

### 1.3. Présentation par générateurs et relations

PROPOSITION 2. — *L'opérade* $\Pi$ *est engendrée par* $\Pi(\{1,2\})$.

*Démonstration.* — On montre d'abord par récurrence que $1 \wedge 2 \wedge \cdots \wedge n$ s'obtient par composition itérée de $1 \wedge 2$ en utilisant la relation

$$(1 \wedge 2 \wedge \cdots \wedge n-1 \wedge \star) \circ_\star (n \wedge n+1) = (1 \wedge 2 \wedge \cdots \wedge n+1). \tag{4}$$

On montre de même que $1 \otimes 2 \otimes \cdots \otimes n$ s'obtient par composition itérée de $1 \otimes 2$ en utilisant la relation

$$(1 \otimes 2 \otimes \cdots \otimes n-1 \otimes \star) \circ_\star (n \otimes n+1) = (1 \otimes 2 \otimes \cdots \otimes n+1). \tag{5}$$

En effectuant successivement la composition d'un élément de la forme $i_1 \wedge i_2 \wedge \cdots \wedge i_p$ dans chaque terme d'un élément de la forme $1 \otimes 2 \otimes \cdots \otimes q$, on obtient le résultat voulu. $\square$

On a dans $\Pi$ les relations suivantes :

$$(1 \otimes 2) \circ_1 (1 \otimes 2) = (1 \otimes 2) \circ_2 (1 \otimes 2) + (1 \otimes 2) \circ_2 (2 \otimes 1), \tag{6}$$

$$(1 \wedge 2) \circ_2 (1 \otimes 2) = (1 \otimes 2) \circ_1 (1 \wedge 2) = \tau\left((1 \wedge 2) \circ_1 (2 \otimes 1)\right), \tag{7}$$

$$(2 \wedge 1) \circ_1 (1 \wedge 2) = (1 \wedge 2) \circ_2 (1 \wedge 2), \tag{8}$$

où $\tau$ est le cycle $3 \to 2 \to 1 \to 3$ agissant dans $\Pi(\{1,2,3\})$.

PROPOSITION 3. — *L'opérade* $\Pi$ *est isomorphe au quotient de l'opérade libre sur* $\Pi(\{1,2\})$ *par l'idéal engendré par les relations ci-dessus. En particulier* $\Pi$ *est une opérade quadratique binaire.*

*Démonstration.* — Soit $\mathcal{F}$ l'opérade libre sur $\Pi(\{1,2\})$, Rel les relations ci-dessus et Quot l'opérade quotient de $\mathcal{F}$ par l'idéal engendré par Rel. On a un morphisme d'opérades de Quot $\to \Pi$, surjectif par la proposition 2.

On remarque que la relation (6) est celle de l'opérade Zin et que la relation (8) est celle de la suspension de l'opérade Com. Par ailleurs, on vérifie que la relation (7) définit une loi distributive au sens de Markl [10] reliant l'opérade Zin et la suspension de Com. Comme les $\mathbb{Z}$-modules sous-jacents à Zin et Com sont libres, les $\mathbb{Z}$-modules sous-jacents à Quot sont également libres.

Pour montrer que la projection Quot $\to \Pi$ est un isomorphisme, il suffit de montrer l'égalité des rangs des $\mathbb{Z}$-modules libres sous-jacents. On rappelle la définition de la série génératrice d'une opérade différentielle graduée $\mathcal{P}$ :

$$g_{\mathcal{P}}(x,t) = \sum_{n \geq 1} \sum_k \dim \mathcal{P}^k(n)(-t)^k \frac{x^n}{n!}\cdot$$

Par une propriété des lois distributives, la série génératrice de Quot s'obtient par composition de celles de Zin et de la suspension de Com. On vérifie qu'elle coïncide avec celle de $\Pi$, voir le tableau récapitulatif à la fin de l'article. □

La différentielle de $\Pi$ est donc uniquement déterminée par le respect de la structure d'opérade et les conditions suivantes :

$$d(1 \otimes 2) = 1 \wedge 2, \tag{9}$$

$$d(1 \wedge 2) = 0. \tag{10}$$

On en déduit la description suivante des $\Pi$-algèbres.

Définition 1. — Une $\Pi$-algèbre est la donnée d'un complexe de cochaînes $V$ et d'applications $\prec : V \otimes V \to V$ et $\times : V \otimes V \to V[-1]$ telles que pour tous $x, y, z$ dans $V$,

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \prec z) + (-1)^{yz} x \prec (z \prec y), \tag{11}$$

$$x \times (y \prec z) = (x \times y) \prec z = (-1)^{yz+z} (x \prec z) \times y, \tag{12}$$

$$x \times y = (-1)^{xy+x+y+1} y \times x, \tag{13}$$

$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z) \tag{14}$$

et

$$(dx \prec y) + (-1)^x (x \prec dy) - d(x \prec y) = (-1)^x x \times y, \tag{15}$$

$$(dx \times y) + (-1)^{x+1} (x \times dy) - d(x \times y) = 0. \tag{16}$$

Remarque 1. — On utilise ici et plus loin l'abus de notation qui consiste, dans les exposants de $(-1)$, à écrire $x, y, z$ pour $\dim(x), \dim(y), \dim(z)$.

Proposition 4. — *L'opérade* $\Pi$ *est de Koszul.*

*Démonstration.* — Soit $\Pi'$ l'opérade obtenue en munissant $\Pi$ de la différentielle nulle. Les opérades Com et Zin sont de Koszul et $\Pi'$ est décrite par une loi distributive, donc $\Pi'$ est de Koszul par le théorème 4.5 de [10]. Par ailleurs, la koszulité d'une opérade différentielle dont les complexes sous-jacents sont bornés est une conséquence de la koszulité de la même opérade avec la différentielle nulle. En effet, les complexes Bar augmentés sont alors acycliques pour la différentielle totale car munis d'une filtration finie à quotients acycliques. Ceci entraîne que $\Pi$ est de Koszul. □

On observe, par ailleurs, que le quotient de $\Pi$ par l'idéal différentiel formé des éléments de dimension non nulle est une opérade (de différentielle nulle) isomorphe à l'opérade Zin des algèbres zinbiel.

D'autre part, on a un morphisme de Com muni de la différentielle nulle dans $\Pi$. C'est un quasi-isomorphisme car les complexes sous-jacents sont les