Bull. Soc. math. France
130 (1), 2002, p. 49–69

COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD DES GRAPHES DE KONTSEVICH

PAR DIDIER ARNAL & MOHSEN MASMOUDI

RÉSUMÉ. — Nous calculons la cohomologie de Hochschild directement sur les graphes de Kontsevich. Celle-ci est localisée sur les graphes totalement antisymétriques ayant autant de pieds que de pattes. La considération de cette cohomologie permet de réinterpréter l'équation de formalité pour l'espace $\mathbb{R}^d$.

ABSTRACT (*Hochschild cohomology of Kontsevich graphs*). — We determine the Hochschild cohomology for the Kontsevich's graphs. As usual, that cohomology is localized on totally antisymmetric graphs with as many feet as legs. Using this cohomology, we reinterpret the formality equation for the space $\mathbb{R}^d$.

1. Introduction

L'opérateur de cohomologie de Hochschild (noté d_H) des opérateurs multi-différentiels apparaît naturellement dans l'équation de formalité de Kontsevich (voir [4] et sa formulation dans [2]) :

Texte reçu le 20 juillet 2000, accepté le 19 décembre 2000

DIDIER ARNAL, Laboratoire de mathématiques MMAS de l'université de Metz, UpresA CNRS 7035, Île du Saulcy 57045 Metz Cedex (France)
E-mail : `arnal@poncelet.sciences.univ-metz.fr`
MOHSEN MASMOUDI, Laboratoire de mathématiques MMAS de l'université de Metz, UpresA CNRS 7035, Île du Saulcy 57045 Metz Cedex (France)
E-mail : `masmoudi@poncelet.sciences.univ-metz.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 46L65, 16E40, 05C90.

Mots clefs. — Formalité, cohomolgie de Hochschild, graphes.

$$
\begin{aligned}
0 = & -d_H\big(\mathcal{F}_{k_1,\dots,k_n}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n)\big)\\
& + \frac{1}{2}\sum_{\substack{I\sqcup J=\{1,\dots,n\}\\ I,J\neq\varnothing}} \varepsilon_\alpha(I,J)(-1)^{(|k_I|-1)|k_J|}\big[\mathcal{F}_{k_I}(\alpha_I),\mathcal{F}_{k_J}(\alpha_J)\big]_G\\
& - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\varepsilon_\alpha(i,j,1,\dots,\widehat{i,j},\dots,n)(-1)^{k_i-1}\mathcal{F}_{((k_i+k_j-1),k_1,\dots,\widehat{k_i,k_j},\dots,k_n)}\\
& \qquad\qquad \big([\alpha_i,\alpha_j]_S\otimes\alpha_1\otimes\cdots\otimes\widehat{\alpha_i,\alpha_j}\otimes\cdots\otimes\alpha_n\big)
\end{aligned}
$$

si $[\ ,\ ]_G$ est le crochet de Gerstenhaber et $[,\ ]_S$ celui de Schouten. On peut écrire cette équation sous la forme :

$$
d_H\left(\mathcal{F}_{(n)}\right) = \pm\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\big[\mathcal{F}_{(i)},\mathcal{F}_{(n-i)}\big]_G \mp \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mathcal{F}_{(n-1)}\big([\underset{i}{\bullet},\underset{j}{\bullet}]_S\otimes\bullet\cdots\otimes\bullet\big).
$$

Si on impose que $\mathcal{F}_{(1)}$ est juste l'opération qui identifie un m tenseur α à l'opérateur m-différentiel d'ordre 1,…,1 qu'il définit canoniquement :

$$
\mathcal{F}_{(1)}(\alpha)(f_1,\dots,f_m) = \langle\alpha, df_1\wedge\cdots\wedge df_m\rangle,
$$

on peut chercher à construire toutes les formalités sur $\mathbb{R}^\bullet$ par induction sur n.

Si $\mathcal{F}_{(1)},\dots,\mathcal{F}_{(n-1)}$ ont été trouvés, le second membre de l'équation est alors un cocycle de Hochschild, la résolution de l'équation pour n est assurée si ce cocycle est exact.

Comme la formalité de Kontsevich est une somme d'opérateurs construits à partir de graphes admissibles, on peut se ramener à un calcul cohomologique sur les graphes eux-mêmes. C'est ce que nous avions fait dans [1] où nous avons introduit la notion de cohomologie de Hochschild des graphes de Kontsevich, en nous restreignant au cas des bons graphes, liés aux structures de Poisson linéaires.

Le but du présent article est le calcul complet de tous les groupes de cohomologie de Hochschild des graphes de Kontsevich ou plutôt des combinaisons linéaires de graphes, en toute dimension et pour tous les graphes.

Ceci sera mené à bien en utilisant une suite spectrale classique dans ce genre de problèmes. Nous avons suivi l'approche de [3] pour la description de cette suite spectrale.

2. Graphes orientés et opérateurs multidifférentiels

Rappelons d'abord comment M. Kontsevich dans [4] associe à chaque graphe orienté $(\Gamma,\mathcal{O})$ un opérateur multidifférentiel $B_{(\Gamma,\mathcal{O})}$ défini sur $\mathbb{R}^d$ pour tout d (on dira qu'il est défini sur $\mathbb{R}^\bullet$).

Pour définir un graphe Γ, on se donne d'abord ses sommets, qui sont de deux catégories : les *sommets aériens* sont des points p_j $(1\leq j\leq n)$ du demi plan de Poincaré

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Im}(z) > 0\},$$

les *sommets terrestres* sont eux des points q_ℓ de la droite réelle. On suppose toujours $q_1 < q_2 < \cdots < q_m$. On note P l'ensemble des sommets aériens et Q l'ensemble des sommets terrestres. Les arêtes sont des flèches $\overrightarrow{ab}$ partant d'un sommet aérien a et arrivant sur un sommet aérien ou terrestre b. Il n'y a pas d'arête multiple. L'ensemble de tous les graphes ayant pour sommets les points p_j et q_ℓ est noté

$$G_{P,Q} = G_{\{p_1,\ldots,p_n\},\{q_1,\ldots,q_m\}}.$$

Si Γ est un graphe, on note $\mathrm{Deb}(p_j)$ l'ensemble des flèches partant du sommet p_j et k_j le cardinal de $\mathrm{Deb}(p_j)$. On note aussi, pour chaque sommet b de Γ, $\mathrm{Fin}(b)$ l'ensemble des flèches aboutissant sur b et g_b son cardinal.

Le graphe Γ de $G_{P,Q}$ étant donné, on l'oriente en choisissant un ordre total sur l'ensemble $\mathcal{A}(\Gamma)$ de ses arêtes. On note $\mathcal{O}$ cette orientation, $(\Gamma,\mathcal{O})$ le graphe orienté et $\overrightarrow{G_{P,Q}}$ l'ensemble de tous les graphes orientés.

Chaque graphe orienté $(\Gamma,\mathcal{O})$ permet de définir une application $B_{(\Gamma,\mathcal{O})}$ qui, à chaque famille $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de tenseurs contravariants, totalement antisymétriques et d'ordres respectifs $k_1,\ldots,k_n$ sur $\mathbb{R}^\bullet$, associe un opérateur m différentiel $B_{(\Gamma,\mathcal{O})}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n)$. Les arêtes de Γ sont d'abord numérotées suivant leur ordre de 1 à $|k_{\{1,\ldots,n\}}| = k_1+\cdots+k_n$ et on pose $K = |k_{\{1,\ldots,n\}}|$, ensuite on considère tous les multi-indices $(i_1,\ldots, i_K)$ variant entre 1 et la dimension d de l'espace et on note $\alpha_j(\mathrm{Deb}(p_j))$ la composante $\alpha_j^{i_{r_1}\cdots i_{r_{k_j}}}$ du tenseur α_j si l'ensemble $\mathrm{Deb}(p_j)$ est formé des arêtes numérotées $r_1<\cdots<r_{k_j}$ et $\partial_{\mathrm{Fin}(b)}$ l'opérateur

$$\partial_{\mathrm{Fin}(b)} = \frac{\partial^{g_b}}{\partial x^{i_{s_1}}\cdots\partial x^{i_{s_{g_b}}}}$$

si $\mathrm{Fin}(b)$ contient les arêtes numérotées $s_1,\ldots, s_{g_b}$. Alors $B_{(\Gamma,\mathcal{O})}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n)$ est défini par

$$B_{(\Gamma,\mathcal{O})}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n)(f_1,\ldots,f_m) = \sum_{1\le i_1,\ldots,i_K\le d}\ \prod_{j=1}^{n}\partial_{\mathrm{Fin}(p_j)}\alpha_j\big(\mathrm{Deb}(p_j)\big) \times\prod_{l=1}^{m}\partial_{\mathrm{Fin}(q_\ell)}f_\ell.$$

On étend enfin l'application B linéairement à l'espace vectoriel des combinaisons linéaires

$$\gamma = \sum a_{(\Gamma,\mathcal{O})}(\Gamma,\mathcal{O})$$

de graphes orientés $(\Gamma,\mathcal{O})$ en posant

$$B_\gamma = \sum a_{(\Gamma,\mathcal{O})}B_{(\Gamma,\mathcal{O})}.$$

3. Graphes non orientés

Sur la formule ci-dessus, on voit que si l'on garde le graphe Γ mais qu'on change son orientation en remplaçant $\mathcal{O}$ par $\mathcal{O}'$, on obtient le même opérateur multidifférentiel à un signe près $\varepsilon_\Gamma(\mathcal{O},\mathcal{O}')$ qui ne dépend que de Γ et de ses orientations. Par exemple les deux orientations $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ ci-dessous du même graphe Γ

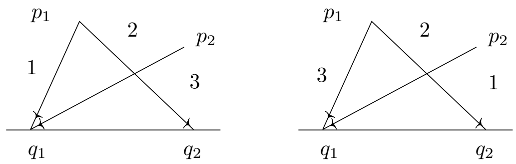

FIGURE 1

définissent les opérateurs

$$B_{(\Gamma,\mathcal{O})}(\alpha_1\otimes\alpha_2)(f_1,f_2)=\sum_{1\le i_1,i_2,i_3\le d}\alpha_1^{i_1i_2}\alpha_2^{i_3}\partial_{i_1i_3}f_1\partial_{i_2}f_2,$$

$$B_{(\Gamma,\mathcal{O}')}(\alpha_1\otimes\alpha_2)(f_1,f_2)=\sum_{1\le i_1,i_2,i_3\le d}\alpha_1^{i_2i_3}\alpha_2^{i_1}\partial_{i_1i_3}f_1\partial_{i_2}f_2.$$

On a donc ici $\varepsilon_\Gamma(\mathcal{O},\mathcal{O}')=-1$.

Comme on veut travailler seulement sur des graphes sans orientation, on ne garde que les combinaisons linéaires de graphes γ telles que

$$a_{(\Gamma,\mathcal{O}')}=\varepsilon_\Gamma(\mathcal{O}',\mathcal{O})a_{(\Gamma,\mathcal{O})}$$

pour tout couple d'orientations $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$. Prenons alors une orientation « canonique » $\mathcal{O}_0$ d'un graphe Γ, par exemple l'ordre lexicographique des flèches $\overrightarrow{ab}$ de $\mathcal{A}(\Gamma)$, et notons b_Γ le nombre $a_{(\Gamma,\mathcal{O}_0)}\#\mathcal{A}(\Gamma)!$ et B_Γ l'application $B_{(\Gamma,\mathcal{O}_0)}$. Si $O(\Gamma)$ désigne tous les ordres possibles sur $\mathcal{A}(\Gamma)$, on aura donc :

$$\begin{aligned}\gamma&=\sum_{\Gamma\in G_{P,Q}}\sum_{\mathcal{O}\in O(\Gamma)}a_{(\Gamma,\mathcal{O})}(\Gamma,\mathcal{O})\\&=\sum_{\Gamma\in G_{P,Q}}a_{(\Gamma,\mathcal{O}_0)}\sum_{\mathcal{O}\in O(\Gamma)}\varepsilon_\Gamma(\mathcal{O},\mathcal{O}_0)(\Gamma,\mathcal{O})=\sum_{\Gamma\in G_{P,Q}}b_\Gamma e_\Gamma\end{aligned}$$

si

$$e_\Gamma=\frac{1}{\#\mathcal{A}(\Gamma)!}\sum_{\mathcal{O}\in O(\Gamma)}\varepsilon_\Gamma(\mathcal{O},\mathcal{O}_0)(\Gamma,\mathcal{O})\qquad\big(\text{alors}\quad B_{e_\Gamma}=B_{(\Gamma,\mathcal{O}_0)}\big).$$

On notera simplement :

$$\gamma = \sum_{\Gamma \in G_{P,Q}} b_\Gamma \Gamma, \qquad B_\gamma = B_{\sum b_\Gamma \Gamma} = \sum_{\Gamma \in G_{P,Q}} b_\Gamma B_\Gamma \quad \Big(= \sum_{\Gamma \in G_{P,Q}} b_\Gamma B_{(\Gamma, \mathcal{O}_0)} \Big).$$

On identifiera donc l'espace ainsi obtenu à l'espace $V_{P,Q}$ engendré par les graphes non orientés et l'application B est maintenant définie sur cet espace.

Définition (opérateur de Kontsevich). — Soit $T(\mathbb{R}^d)$ l'espace des tenseurs contravariants totalement antisymétriques et $D(\mathbb{R}^d)$ celui des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^d$. On appellera *opérateur de Kontsevich* l'application

$$B : V_{P,Q} \longrightarrow \operatorname{End}\big(\bigotimes^n T(\mathbb{R}^\bullet), \bigotimes^m D(\mathbb{R}^\bullet)\big), \quad \gamma \longmapsto B_\gamma.$$

Remarque. — La formalité de Kontsevich doit satisfaire une symétrie supplémentaire qui permette de remplacer le produit tensoriel $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n$ par un produit gradué symétrique $\alpha_1 \bullet \cdots \bullet \alpha_n$ (voir par exemple [2]). Il faut donc considérer aussi l'action du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, \dots, n\}$ sur les graphes Γ, en permutant l'ordre des sommets aériens de Γ. Si on a muni Γ de l'ordre canonique $\mathcal{O}_0$ et si σ appartient à $\mathfrak{S}_n$, il faut alors distinguer l'opération qui consiste à permuter les flèches issues des sommets p_j « par paquets », en conservant l'ordre des $\operatorname{Deb}(p_j)$ qu'on notera $(\mathcal{O}_0)^\sigma$ de l'ordre canonique du graphe Γ^σ qu'on notera $(\mathcal{O}^\sigma)_0$. On notera $\varepsilon_\Gamma(\sigma)$ le signe $\varepsilon((\mathcal{O}^\sigma)_0(\mathcal{O}_0)^\sigma) \cdot \varepsilon_\alpha(\sigma)$, où $\varepsilon_\alpha(\sigma)$ est défini dans [2] comme la signature de l'effet sur les k_j impairs de la permutation σ.

Dans ce cas, on ne gardera finalement que les combinaisons linéaires de graphes non orientés $\gamma = \sum b_\Gamma \Gamma$ telles que $b_{\Gamma^\sigma} = \varepsilon_\Gamma(\sigma) b_\Gamma$ pour tout Γ et tout σ. L'espace de ces combinaisons de graphes sera noté $V_{n,m}$, il est engendré par l'ensemble $G_{n,m}$ des classes $[\Gamma]$ de graphes Γ à l'ordre des sommets aériens près.

Dans la suite, on ne tiendra pas compte de cette action de $\mathfrak{S}_n$.

4. Pieds et pattes des graphes

Soit Γ un graphe non orienté, on appellera pieds de Γ les sommets terrestres $q_1, \dots, q_m$, pattes de Γ les arêtes aboutissant à un pied, c'est-à-dire les éléments de $\operatorname{Fin}(q_1) \cup \cdots \cup \operatorname{Fin}(q_m)$. On notera $\Delta(\Gamma)$ le graphe purement aérien obtenu en supprimant la droite réelle, les pieds et les pattes de Γ et $\partial\Delta(\Gamma)$ l'ensemble des origines des pattes de Γ. On représente les éléments de $\partial\Delta(\Gamma)$ par des couples (p_j, x) $(1 \leq x \leq r_j)$ en numérotant pour chaque sommet aérien p_j les r_j pattes qui en sont issues. Connaissant $\Delta = \Delta(\Gamma)$ et son bord $\partial\Delta = \partial\Delta(\Gamma)$ qui est une partie finie de $P \times \mathbb{N}$, on peut retrouver Γ en se donnant une famille de parties $U'_1, \dots, U'_m$ de $\partial\Delta$ telle que les U'_ℓ non vides forment une partition de $\partial\Delta(\Gamma)$. Un tel graphe n'est admissible que si aucun U'_ℓ ne contient deux