Bull. Soc. math. France
130 (1), 2002, p. 71–85

CÔNE NORMAL ET RÉGULARITÉS DE KUO-VERDIER

PAR PATRICE ORRO & DAVID TROTMAN

RÉSUMÉ. — Nous introduisons de nouvelles régularités de Kuo-Verdier (r^e) et montrons que pour une stratification C^2 $(a + r^e)$-régulière, en particulier (w)-régulière, la fibre du cône normal le long d'une strate Y est égale au cône tangent à la fibre d'une rétraction sur Y. Ceci généralise le résultat analogue pour les stratifications sous-analytiques (b)-régulières démontré par J.-P. Henry et M. Merle [9], et aussi le résultat analogue pour les stratifications différentiables $(w + \delta)$-régulières démontré par nous-même [17]. Nous démontrons aussi l'ouverture de la projection du cône normal — appelée *pseudo-platitude normale.*

ABSTRACT (*Normal cone and Kuo-Verdier regularities*). — We introduce new Kuo-Verdier regularities (r^e) and prove that for an $(a + r^e)$-regular (in particular for a (w)-regular) C^2 stratification, the fibre of the normal cone along a stratum Y is equal to the tangent cone of the fibre of a retraction onto Y. This generalises the analogous result for (b)-regular subanalytic stratifications proved by J.-P. Henry and M. Merle [9], and also the analogous result for $(w+\delta)$-regular differentiable stratifications proved by the authors [17]. We further prove that the projection of the normal cone is open — one says then that the stratification is *normally pseudo-flat.*

Texte reçu le 24 octobre 2000, révisé le 19 février 2001, accepté le 11 avril 2001

PATRICE ORRO, Laboratoire de Mathématiques (UMR 5127), Université de Savoie, Campus scientifique, 73376 Le Bourget-du-Lac Cedex (France) • *E-mail :* `orro@univ-savoie.fr`

DAVID TROTMAN, Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités (UMR 6632), Université de Provence, Centre de Mathématiques et Informatique, 13453 Marseille (France)
E-mail : `trotman@gyptis.univ-mrs.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 58A35, 32S15.

Mots clefs. — Régularité de Kuo-Verdier, stratification, cône normal, pseudo-platitude normale.

Ce travail a été effectué avec l'aide du CNRS, du JSPS (Japanese Society for the Promotion of Science), et de l'Institut Isaac Newton de l'Université de Cambridge.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2002/71/$ 5.00

1. Introduction

Dans la suite, k est un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{Z}$ un fermé stratifié de $\mathbb{R}^n$, ayant pour strates des sous-variétés différentiables de classe C^k. Pour chaque strate Y de $\mathcal{Z}$ on notera $C_Y\mathcal{Z}$ le cône normal de $\mathcal{Z}$ le long de Y, c'est-à-dire la restriction au-dessus de Y de l'adhérence de l'ensemble

$$\big\{\big(x,\mu\big(x\pi(x)\big)\big) : x \in \mathcal{Z} - Y\big\} \subset \mathbb{R}^n \times S^{n-1},$$

où π est la projection canonique locale sur Y, et $\mu(x)$ le vecteur unitaire $x/\|x\|$. En fait $C_Y\mathcal{Z}$ est la réunion des cônes normaux C_YX_i, où les X_i sont les strates de $\mathcal{Z}$ adhérentes à Y.

L'objet principal de cette note est de préciser sous quelles hypothèses sur la stratification $\mathcal{Z}$ les conditions suivantes sont vérifiées :

Condition (n). — *La fibre $(C_Y\mathcal{Z})_y$ de $C_Y\mathcal{Z}$ en un point y de Y est le cône tangent $C_y(\mathcal{Z}_y)$ à la fibre $\mathcal{Z}_y = \mathcal{Z} \cap \pi^{-1}(y)$ de $\mathcal{Z}$ en y.*

Condition de pseudo-platitude normale (*ppn*). — *La projection*

$$p : C_Y\mathcal{Z} \longrightarrow Y$$

est ouverte pour toute strate Y de $\mathcal{Z}$.

Nous rappelons au §2 les conditions de régularité usuelles, dont nous aurons besoin, en particulier la condition (a) de Whitney. Quand une stratification vérifie deux conditions, par exemple est (a)-régulière et (n)-régulière, nous dirons qu'elle est $(a+n)$-régulière, pour la simplicité des notations. Les stratifications sous-analytiques vérifiant les conditions $(a+n)$ ou (*ppn*) ont un cône normal ayant un bon comportement du point de vue de la dimension des fibres. En effet, elles vérifient la condition

$$\dim(C_Y\mathcal{Z})_y \leq \dim\mathcal{Z} - \dim Y - 1.$$

C'est évident pour $(a+n)$, et pour (*ppn*) cela résulte de (5.1 ii$'$) (voir aussi [4], [5, lemme 2.4]). Pour des stratifications différentiables il y a le problème de savoir ce que c'est que la dimension.

Malgré cette limitation, le cône tangent $C_y(\mathcal{Z}_y)$ à la fibre $\mathcal{Z}_y = \mathcal{Z} \cap \pi^{-1}(y)$ (et donc la fibre $(C_Y\mathcal{Z})_y$ du cône normal, supposant (n)) peut être assez arbitraire : des travaux récents de Ferrarotti, Fortuna et Wilson montrent que tout cône semi-algébrique fermé de codimension ≥ 1 est réalisé comme le cône tangent en un point d'une certaine variété algébrique réelle [6], et Kwiecinski et Trotman ont montré que *tout* cône fermé est réalisé comme le cône tangent en une singularité isolée d'un certain espace stratifié $C^\infty(b)$-régulier [14].

Les premiers résultats dans la direction de notre étude ont été obtenus par Hironaka, qui a montré dans [10] qu'une stratification de Whitney (*i.e.* (b)-régulière) d'un ensemble analytique (réel ou complexe) est normalement pseudo-plate le long de chaque strate. J.-P. Henry et M. Merle [9] ont montré l'assertion analogue à (n) avec $\mathcal{Z}$ remplacé par $X \cup Y$ quand X et Y sont deux strates adjacentes d'une stratification de Whitney sous-analytique de $X \cup Y$. Un exemple algébrique réel de [2] montre qu'il ne suffit pas en général que la stratification soit $(a+\delta)$-régulière.

Dans [17], nous avons étendu le résultat de Henry et Merle au cadre différentiable, avec l'hypothèse que la stratification vérifie les conditions (w) de Verdier et (δ) de Bekka-Trotman. Ici nous améliorons les résultats de [17] par un affaiblissement de la régularité imposée à la stratification. Nous montrons dans le théorème 3.1 que (n) est vérifiée par toute stratification différentiable (a)-régulière ayant en plus une régularité (r^e), que nous introduisons ici.

Toute stratification C^2 (w)-régulière vérifie automatiquement (a) et (r^e), c'est-à-dire $(a+r^e)$. Pour des strates sous-analytiques la combinaison $(a+r^e)$ est équivalente (proposition 2.5) au critère (r) introduit par T.-C. Kuo en 1971, ce qui entraîne la condition (b) de Whitney [13] ; on sait depuis [19] que (r) est strictement plus faible que (w) dans le cas semi-algébrique, et il existe même des exemples algébriques réels [3]. L'équivalence de (b), (r) et (w) pour les stratifications analytiques complexes est connue depuis 1982 ([18], [8]).

Nous montrons aussi, dans la proposition 5.2, la pseudo-platitude normale de toute stratification $(a+r^e)$-régulière. L'exemple 4.2 (un « *escargot de Kuo* », déjà utilisé par nous dans [16]) montre qu'une stratification différentiable (b)-régulière ne vérifie pas forcément (n) ou (*ppn*). À la fin du §5 nous décrivons des exemples algébriques montrant qu'il n'y a pas d'implication entre les conditions (n) et (*ppn*), même en supposant la condition (a).

2. Définitions et résultats préliminaires

Nous rappelons d'abord les définitions des conditions (a) et (b) de Whitney, (r) de Kuo [13], (w) de Kuo-Verdier [21] et (δ) de Bekka-Trotman [1], [2].

Soient X et Y deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ telles que $Y \cap \overline{X} \neq \varnothing$, π la projection locale sur Y. Suivant Hironaka [10], nous notons par $\alpha_{X,Y}(x)$ la distance de T_xX à $T_{\pi(x)}Y$, qui s'exprime par

$$\alpha_{X,Y}(x) = \max\bigl\{\langle \mu(u), \mu(v)\rangle : u \in N_xX - \{0\},\ v \in T_{\pi(x)}Y\bigr\},$$

et par $\beta_{X,Y}(x)$ la distance de $x\pi(x)$ à T_xX exprimée par

$$\beta_{X,Y}(x) = \max\bigl\{\langle \mu(u), \mu(x\pi(x))\rangle : u \in N_xX - \{0\}\bigr\},$$

où $\langle\, ,\rangle$ est le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $v \in \mathbb{R}^n$, la distance du vecteur v à un plan B s'écrit

$$\eta(v,B) = \sup\big\{v \cdot n : n \in B^\perp,\ \|n\| = 1\big\}.$$

Posons

$$d(A,B) = \sup\big\{\eta(v,B) : v \in A,\ \|v\| = 1\big\}.$$

Posons encore

$$R_{X,Y}(x) = \frac{\|x\|\alpha_{X,Y}(x)}{\|x\pi(x)\|} \quad \text{et} \quad W_{X,Y}(x,y) = \frac{d(T_xX, T_yY)}{\|xy\|}.$$

Lorsque aucune confusion ne sera possible, nous omettrons de préciser les indices X et Y.

Définition 2.1. — Le couple de strates (X,Y) vérifie en $0 \in Y$:

- la condition (a) si, pour x dans X,
$$\lim_{x\to 0} \alpha_{X,Y}(x) = 0;$$
- la condition (b) si, pour x dans X,
$$\lim_{x\to 0} \alpha_{X,Y}(x) = \lim_{x\to 0} \beta_{X,Y}(x) = 0;$$
- la condition (r) si, pour x dans X,
$$\lim_{x\to 0} R_{X,Y}(x) = 0;$$
- la condition (w) si, pour x dans X et y dans Y, $W_{X,Y}(x,y)$ est borné près de 0 ;
- la condition (δ) si, pour x dans X et y dans Y, l'angle entre la droite xy et T_xX est borné, près de 0, par une constante $\delta < \frac{1}{2}\pi$.

Dans cet article nous introduisons la condition (r^e) suivante, de type Kuo-Verdier.

Définition 2.2. — Soit $e \in [0,1[$. Nous dirons que (X,Y) vérifie la condition (r^e) en $y \in Y$ si, pour $x \in X$, la quantité suivante est bornée près de 0 :

$$R_e(x) = \frac{\|y\pi(x)\|^e \alpha_{X,Y}(x)}{\|x\pi(x)\|}.$$

Nous utiliserons le plus souvent $y = 0$ auquel cas R_e devient

$$\frac{\|\pi(x)\|^e \alpha_{X,Y}(x)}{\|x\pi(x)\|}.$$

Cette condition est invariante par difféomorphisme de classe C^2. Ce n'est autre que (w) quand $e = 0$, ainsi (w) implique (r^e) pour tout $e \in [0,1[$. Mais, contrairement à (w), la condition (r^e) quand $e > 0$ n'implique pas la condition (a) : on construit facilement un contre-exemple d'une surface semi-algébrique dans $\mathbb{R}^3$ obtenue en pinçant un demi-plan $\{z \geq 0,\ x = 0\}$, de bord l'axe $0y = Y$, dans une région cuspidale $\Gamma = \{x^2 + y^2 \leq z^p\}$, où p est un entier impair tel que $p > 2/e$, de telle façon que dans Γ il y ait des suites tendant vers 0 pour lesquelles la condition (a) ne soit pas vérifiée. On peut vérifier que cet exemple est (r^e)-régulier.

Il est bien souvent utile de savoir que l'intersection transverse de deux stratifications régulières est encore régulière, et nous aurons besoin de cette propriété pour la condition $(a + r^e)$ dans la preuve du théorème 3.1, dans le cas où l'une des stratifications est une seule variété lisse. Rappelons tout d'abord la notion d'intersection transverse de deux stratifications :

DÉFINITION 2.3. — Soient Σ et Σ' deux stratifications. Nous dirons qu'elles sont *transverses* si pour toutes strates X de Σ et X' de Σ' les variétés X et X' sont transverses. La stratification intersection $\Sigma \cap \Sigma'$ est celle donnée par les $X \cap X'$ avec $X \in \Sigma$ et $X' \in \Sigma'$.

Une démonstration du fait que la condition (b) est préservée par intersection transverse était donnée par Gibson [7], pour la condition $(a + \delta)$ voir [1] ou [2]. Pour la condition (w) nous ne connaissons aucune référence : la propriété d'invariance ne semble pas avoir été énoncée sauf dans le cas d'une section par une variété lisse [21]. La démonstration du théorème suivant s'applique à toutes les conditions envisagées ci-dessus.

THÉORÈME 2.4. — *Les conditions (a), (b), (r), (w), $(a + \delta)$ et $(a + r^e)$ pour $0 \leq e < 1$ sont invariantes par intersection transverse de deux stratifications de classe C^2.*

Démonstration. — Considérons tout d'abord deux plans A et B transverses. Pour $v \in \mathbb{R}^n$, la distance du vecteur v à B s'écrit

$$\eta(v, B) = \sup\big\{v \cdot n : n \in B^\perp,\ \|n\| = 1\big\}.$$

La distance de v à $A \cap B$ s'écrit donc

$$\eta(v, A \cap B) = \sup\big\{v \cdot n : n \in A^\perp + B^\perp,\ \|n\| = 1\big\}.$$

Décomposons $A^\perp + B^\perp$ en $I + U + V$ où $I = A^\perp \cap B^\perp$, et U (resp. V) est le complémentaire orthogonal de I dans $A^\perp$ (resp. $B^\perp$). Alors

$$\eta(v, A \cap B) = \sup\Big\{v \cdot \Big(\sum_{i=1}^{3} n_i\Big) : n_1 \in I,\ n_2 \in U,\ n_3 \in V,\ \Big\|\sum_{i=1}^{3} n_i\Big\| = 1\Big\}.$$

Soient maintenant Σ et Σ' deux stratifications transverses.

Prenons deux strates $X \cap X'$ et $Y \cap Y'$ de $\Sigma \cap \Sigma'$, telles que $0 \in Y \cap Y' \cap \overline{(X \cap X')}$, avec éventuellement $X = Y$ ou $X' = Y'$. Nécessairement $0 \in Y \cap \overline{X}$ et $0 \in Y' \cap \overline{X}'$.

Soient U un voisinage de 0 et $K_{X,Y} > 0$ une constante réelle, tels que

$$d(T_x X, T_y Y) \leq K_{X,Y} \phi_{X,Y}(x, y),$$