Bull. Soc. math. France
130 (1), 2002, p. 87–99

UN RÉSULTAT GÉNÉRIQUE D'UNICITÉ POUR LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

PAR LAURE SAINT-RAYMOND

RÉSUMÉ. — Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique, $\mathcal{E}'$ un espace métrique et (S) un système d'équations d'évolution admettant une solution dans $\mathcal{E}'$ pour toute donnée initiale dans $\mathcal{E}$ et stable vis-à-vis des données initiales sur $\mathcal{E}$. On montre que l'ensemble des données initiales pour lesquelles (S) admet une unique solution est un G_δ de $\mathcal{E}$. En particulier, si l'unicité est vraie sur un sous-ensemble dense de $\mathcal{E}$, elle l'est génériquement.

ABSTRACT (*A generic result of uniqueness for evolution equations*)
Let $\mathcal{E}$ be a topological space, $\mathcal{E}'$ a metric space and (S) a system of evolution equations admitting a solution in $\mathcal{E}'$ for all initial data in $\mathcal{E}$ and stable with respect to initial data on $\mathcal{E}$. We prove that the set of initial data such that (S) admits a unique solution is a G_δ subset of $\mathcal{E}$. In particular, if the uniqueness property is satisfied on a dense subset of $\mathcal{E}$, it holds generically.

1. Unicité et stabilité

L'unicité pour un système d'équations d'évolution est une question importante pour la modélisation de phénomènes physiques. Le but de cet article est de montrer comment cette question est reliée aux problèmes de stabilité.

Texte reçu le 6 décembre 2000, révisé le 24 avril 2001, accepté le 11 mai 2001.

LAURE SAINT-RAYMOND, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris (France) • *E-mail :* saintray@ann.jussieu.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 35A05, 35B30, 35B35.

Mots clefs. — Unicité, stabilité, équations d'évolution.

De manière évidente, si un système (S) est fortement stable sur un espace $\mathcal{E}$ de données initiales, c'est-à-dire si

$$\forall f, g \text{ solutions de } (S), \quad \|f-g\|_{L^\infty([0,T],\mathcal{E})} \le C\|f^0-g^0\|_{\mathcal{E}},$$

le système (S) admet une unique solution dans $\mathcal{E}$. Cependant, ce type d'estimation de stabilité n'est valable que pour des solutions régulières dont on ne sait pas prouver l'existence en général.

L'idée est donc d'obtenir une condition analogue pour des solutions faibles. Un premier pas dans cette direction est fait grâce à des estimations de stabilité fort-faible :

$$\forall f \text{ solution régulière}, \forall g \text{ solution de } (S),$$
$$\|f-g\|_{L^\infty([0,T],\mathcal{E})} \le C(f)\|f^0-g^0\|_{\mathcal{E}}.$$

On peut alors montrer que si le système (S) a une solution régulière f, toutes les solutions de même donnée initiale coincident avec f. Mais on n'a pas d'unicité pour des données initiales non régulières.

Pour obtenir de l'unicité dans un cadre plus général, il faudrait pouvoir relier cette question à la stabilité faible, c'est-à-dire à une propriété du type :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{soit } f_n^0 \rightharpoonup f^0, \text{ et } f_n \text{ une solution de } (S) \text{ avec donnée initiale } f_n^0, \text{ toute} \\ \text{valeur d'adhérence } f \text{ de } (f_n) \text{ est solution de } (S) \text{ avec donnée initiale } f^0. \end{cases}$$

2. Résultat général

Le résultat que nous donnons ici répond partiellement à la question ci-dessus :

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique, $\mathcal{E}'$ un espace métrique et (S) un système d'équations d'évolution admettant une solution dans $\mathcal{E}'$ pour toute donnée initiale dans $\mathcal{E}$ et tel que :*

$(H1)$ *le système (S) est stable sur $\mathcal{E}$, c'est-à-dire qu'on suppose : pour tout $f^0 \in \mathcal{E}$, pour toute famille (f^0_ϵ) de $\mathcal{E}$ convergeant vers f^0, pour toute famille (f_ϵ) de $\mathcal{E}'$ où f_ϵ est une solution de (S) avec donnée initiale f^0_ϵ, il existe au moins une valeur d'adhérence de la famille (f_ϵ) et toute valeur d'adhérence de la famille (f_ϵ) est solution du système (S) avec la donnée initiale f^0 ;*

$(H2)$ *il existe un sous-ensemble dense $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ tel que, sur $\mathcal{D}$, (S) admet une unique solution.*

Alors, il existe un G_δ dense de $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}^0$, tel que, sur $\mathcal{E}^0$, (S) admet une unique solution.

Le théorème 1 repose essentiellement sur un résultat classique de topologie, dont nous rappelons l'énoncé et l'esquisse de la preuve (voir [2] pour les définitions).

PROPOSITION. — *Soit X un espace topologique, Y un espace métrique, et F une application multivoque semi-continue supérieurement de X dans Y. On suppose qu'il existe un sous-ensemble dense D de X tel que*

$$\forall x \in D, \quad F(x) \text{ est un singleton.}$$

Alors il existe un G_δ dense de X, noté X^0, tel que

$$\forall x \in X^0, \quad F(x) \text{ est un singleton.}$$

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le recouvrement $\bigcup_{y\in Y} B(y, \frac{1}{n})$ de Y par les boules ouvertes de rayon $\frac{1}{n}$. On définit alors l'ensemble

$$\Omega_n = \bigl\{x \in X\,; \exists\, y \in Y,\ F(x) \subset B(y, \tfrac{1}{n})\bigr\}.$$

Comme F est semi-continue supérieurement, $\{x \in X\,; F(x) \subset B(y, \frac{1}{n})\}$ est ouvert pour tout $y \in Y$: Ω_n est donc ouvert.

Soit $x \in X$ tel que $F(x)$ est un singleton $\{y\}$. Alors $F(x)$ est contenu dans la boule $B(y, \frac{1}{n})$ pour tout $n \in I^*$, en particulier $F(x) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$. Réciproquement, soit $x \in X$ tel que $F(x) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$, le diamètre de $F(x)$ est plus petit que $\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc $F(x)$ est un singleton. L'ensemble

$$\{x \in X\,; F(x) \text{ est un singleton}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$$

est donc un G_δ. Comme on a supposé qu'il contenait une partie dense de X, c'est un G_δ dense. □

Munis de cet outil, nous pouvons maintenant donner la démonstration du théorème 1.

Preuve du théorème 1. — On note $X = \mathcal{E}$ l'ensemble des données initiales sur lequel (S) est stable, et $Y = \mathcal{E}'$ l'espace où sont définies les solutions de (S). On définit l'application multivoque F par :

$$\forall f^0 \in X, \quad F(f^0) = \bigl\{f \in Y\,; f \text{ solution de } (S) \text{ avec donnée initiale } f^0\bigr\}.$$

La première étape consiste à vérifier que l'application F est semi-continue supérieurement, *i.e.* que pour tout fermé $E \subset Y$, pour toute $f^0 \in X$ et pour toute famille (f^0_ϵ) convergeant vers f^0 dans X, si $F(f^0_\epsilon) \cap E \neq \varnothing$, alors $F(f^0) \cap E$ n'est pas vide. Considérons donc $E \subset Y$, $f^0 \in X$ et une famille (f^0_ϵ) convergeant vers f^0 dans X. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$, $F(f^0_\epsilon) \cap E \neq \varnothing$. Il existe alors une famille (f_ϵ) telle que $f_\epsilon \in F(f^0_\epsilon) \cap E$.

L'hypothèse $(H1)$ implique que la famille (f_ϵ) a au moins une valeur d'adhérence f. De plus, comme toutes les valeurs d'adhérence de (f_ϵ) appartiennent à $F(f^0)$, f appartient à $F(f^0)$. Il existe donc une suite (ϵ_n) telle que (f_{ϵ_n}) converge vers f dans Y. Comme E est fermé, on a nécessairement $f \in E$. Finalement $f \in F(f^0) \cap E \neq \varnothing$. L'application F est alors semi-continue supérieurement.

L'hypothèse $(H2)$ montre que $F(f^0)$ est un singleton pour tout $f^0 \in \mathcal{D}$.

La proposition implique alors que $F(f^0)$ est un singleton pour toute donnée f^0 dans un G_δ dense de $X = \mathcal{E}$, c'est-à-dire que (S) admet génériquement une unique solution. □

Remarques. — Le théorème 1 est intéressant dans la mesure où il assure qu'un système d'équations vérifiant les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$ est génériquement déterministe : on peut alors dire qu'il est physiquement raisonnable. Néanmoins, la méthode n'est pas constructive, c'est-à-dire que pour une condition initiale donnée, on ne sait pas dire s'il y a unicité ou non.

L'autre limite de ce théorème est liée à l'hypothèse $(H2)$: l'unicité générique n'est pas donnée sous la seule condition de stabilité faible, comme on aurait pu l'espérer. En pratique, cela signifie qu'il est nécessaire de savoir construire des solutions suffisamment régulières.

Nous proposons ici trois exemples d'utilisation du théorème 1 pour des équations classiques de la physique des gaz et des plasmas : les équations d'Euler des fluides incompressibles en 2D, le système de Vlasov-Poisson et le modèle BGK de l'équation de Boltzmann.

3. Application aux équations d'Euler incompressibles en 2D

Le résultat que nous énonçons ici avait déjà été obtenu par Pierre-Louis Lions dans [6] par une méthode semi-constructive, c'est-à-dire que le G_δ dense de données initiales pour lesquelles il y a unicité de la solution était obtenu comme intersection d'ouverts décrits explicitement. Par contre, comme ici, il n'y avait pas de caractérisation explicite du G_δ dense lui-même, c'est-à-dire que pour une donnée initiale fixée (non régulière), on ne sait pas dire s'il y a ou non unicité de la solution.

Théorème 2. — *Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ les ensembles définis respectivement par*

$$\mathcal{E} = \Big\{ u^0 \in L^2(\mathbb{R}^2)\,;\, \nabla_x \cdot u^0 = 0,\ \omega^0 = \partial_{x_1} u_2^0 - \partial_{x_2} u_1^0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2),$$
$$\textit{et } \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int \omega^0(\mathrm{d}x) \le C_0 \Big\},$$

$$\mathcal{E}' = \big\{ u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))\,;\, \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))} \le C_0 \big\}$$

et munis respectivement des topologies faibles de $L^2(\mathbb{R}^2)$ et de $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$. Alors il existe un G_δ dense de $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}^0$ tel que pour tout $u^0 \in \mathcal{E}^0$, les équations d'Euler incompressibles

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x \pi = 0, \\ \nabla_x \cdot u = 0, \\ u(0,x,v) = u^0(x), \end{cases}$$

admet une unique solution faible $u \in \mathcal{E}'$.

Preuve du théorème 2. — Soit (u^0_ϵ) une famille de $\mathcal{E}$ convergeant vers u^0 pour la topologie faible de L^2. D'après [3], pour tout ϵ, il existe $u_\epsilon \in \mathcal{E}'$ solution des équations d'Euler incompressibles avec la donnée initiale u^0_ϵ. De plus, on a

$$\partial_t \omega_\epsilon + u_\epsilon \cdot \nabla_x \omega_\epsilon = 0, \quad \partial_t u_\epsilon^2 + u_\epsilon \cdot \nabla_x u_\epsilon^2 + 2u_\epsilon \cdot \nabla_x \pi_\epsilon = 0$$

et comme $\nabla_x \cdot u_\epsilon = 0$,

$$\omega_\epsilon \geq 0 \text{ p.p.}, \quad \|u_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int \omega_\epsilon(\mathrm{d}x) \leq C_0.$$

Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$ une valeur d'adhérence de la famille $(u_\epsilon)_\epsilon$ pour la topologie préfaible. Il existe une suite extraite de (u_ϵ) (renotée (u_ϵ) abusivement) telle que $u_\epsilon \rightharpoonup u$. Pour tout $T > 0$,

- (ω_ϵ) est équicontinue sur $[0, T]$ à valeurs dans $W^{-2,1}(\mathbb{R}^2))$;
- (ω_ϵ) est positive et bornée dans $L^\infty([0, T], \mathcal{M} \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2))$.

Le théorème de Delort permet alors de passer à la limite dans les produits symétriques (qui s'expriment à l'aide d'intégrales singulières)

$$u_{1\epsilon}^2 - u_{2\epsilon}^2 \to u_1^2 - u_2^2 \quad \text{et} \quad u_{1\epsilon} u_{2\epsilon} \to u_1 u_2$$

au sens des distributions sur $[0, T[\times \mathbb{R}^2$. On peut donc passer à la limite dans la formulation en vorticité des équations d'Euler incompressibles

$$\partial_t \omega + (\partial^2_{x_1} - \partial^2_{x_2})(u_1 u_2) + \partial_{x_1} \partial_{x_2} (u_1^2 - u_2^2) = 0, \quad u = \nabla \Delta^{-1} \omega,$$

au sens des distributions. On obtient ainsi que u est solution faible des équations d'Euler incompressibles avec donnée initiale u^0. L'hypothèse $(H1)$ est vérifiée.

On considère alors l'espace de fonctions $\mathcal{D}$ défini par

$$\Big\{ u^0 \in L^2(\mathbb{R}^2) \,; \nabla_x \cdot u^0 = 0, \ \omega^0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2), \\ \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int \omega^0(\mathrm{d}x) \leq C_0 \text{ et } \|\omega^0\|_{W^{1,\infty} \cap L^1(\mathbb{R}^2)} < \infty \Big\}.$$

Soit u une solution faible des équations d'Euler incompressibles avec donnée initiale $u^0 \in \mathcal{D}$. Comme le tourbillon ω est transporté par le flot, on vérifie aisément que les normes L^p de ω sont préservées. En différentiant l'équation sur le tourbillon, on trouve

$$\partial_t \partial_{x_i} \omega + u \cdot \nabla_x \partial_{x_i} \omega + \partial_{x_i} u \cdot \nabla_x \omega = 0.$$

L'inégalité de Sobolev logarithmique

$$\|\nabla_x u\|_{L^\infty} \leq C\big(1 + \|\omega\|_{L^\infty}(1 + \log(1 + \|\nabla_x \omega\|_{L^\infty})) + \|\omega\|_{L^1}\big)$$

couplée avec le lemme de Gronwall, permet d'obtenir une borne $L^\infty([0, T], W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$ sur ω, et donc sur u, pour tout $T < \infty$. En particulier, u est solution forte des équations d'Euler. Il est alors facile de montrer que u est unique. En effet, si u' est aussi une solution,

$$\partial_t (u - u')^2 + u' \cdot \nabla_x (u - u')^2 = 2(u - u') \cdot [\nabla_x \pi' - \nabla_x \pi + (u' - u) \cdot \nabla_x u]$$