

ALTÉRATIONS ET GROUPE FONDAMENTAL PREMIER À p

PAR FABRICE ORGOGOZO

RÉSUMÉ. — Nous démontrons divers résultats sur le plus grand quotient du groupe fondamental étale premier aux caractéristiques, parmi lesquels la formule de Künneth et l'invariance par changement de corps séparablement clos pour les schémas de type fini sur un corps. Ces énoncés sont déduits de faits généraux sur les images directes de champs, une fois spécialisés au cas des toseurs sous un groupe constant fini d'ordre inversible sur la base. Des résultats analogues pour le groupe fondamental modéré sont également discutés.

ABSTRACT (*Alterations and the prime-to- p fundamental group*). — Various results are proved relating to the largest quotient of the étale fundamental group prime to the residual characteristics, including the Künneth formula and invariance under change of separably closed field for schemes of finite type over a field. These are derived from general facts about direct images of stacks, once specialized to the case of torsors under a constant finite group of invertible order over the base. Analogous results for the tame fundamental group are discussed as well.

1. Introduction

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p et soit p' l'ensemble des nombres premiers distincts de p . Dans [24], il est démontré que, si X et Y

Texte reçu le 25 janvier 2002, accepté le 22 mars 2002

FABRICE ORGOGOZO, École normale supérieure, DMA, 45, rue d'Ulm, F-75230, Paris
Cedex 05 (France) • *E-mail* : Fabrice.Orgogozo@ens.fr

Url : <http://www.dma.ens.fr/~orgogozo>

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F35, 14A20, 14D05.

Mots clefs. — Groupe fondamental, champs, descente, schémas simpliciaux.

sont des k -schémas de type fini connexes, on a alors

$$\pi_1^{p'}(X \times_k Y) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{p'}(X) \times \pi_1^{p'}(Y),$$

sous réserve que l'on dispose de la résolution forte des singularités.

Nous prouvons dans cet article que cette formule est valable sans restriction. Nous démontrons en fait des théorèmes de finitude, propriété cohomologique et locale acyclicité génériques sans hypothèse de résolution. Il s'agit ici d'énoncés sur les ensembles de cohomologie de degré 0 et 1. Une partie de ces résultats figurent sous forme conditionnelle dans *loc. cit.* Par ailleurs, les analogues en cohomologie abélienne sont démontrés sans restriction dans [8]. L'ingrédient essentiel de ce travail est le théorème de A.J. de Jong [21] sur les altérations, qui remplace la résolution forte des singularités. Les altérations ont en effet la propriété d'être de descente effective universelle pour la catégorie fibrée des faisceaux étales. Comme dans [24], nous travaillons systématiquement dans la 2-catégorie des champs en groupoïdes, qui est le pendant non commutatif de la catégorie dérivée des faisceaux abéliens.

Au numéro 2 (resp. 3), nous démontrons le théorème de propriété cohomologique et constructibilité (resp. locale acyclicité) générique. Certaines démonstrations initiales de l'auteur ont été modifiées pour faire profiter au lecteur de l'approche plus conceptuelle d'O. Gabber, qui sera certainement plus utile à l'avenir. Le numéro 4 contient divers énoncés de constance locale générique pour les images directes de champs, ainsi que des applications au groupe fondamental premier à p : locale invariance générique des $\pi_1^{p'}$ des fibres géométriques d'un morphisme, invariance par changement de corps séparablement clos et formule de Künneth. Nous énonçons des résultats semblables pour les groupes d'homotopie supérieurs. Enfin, le numéro 5, indépendant des précédents, concerne la formule de Künneth et l'invariance par changement de corps algébriquement clos pour le groupe fondamental modéré ; nous avons recours ici à des techniques de géométrie logarithmique.

Remerciements. — La forme définitive de cet article doit beaucoup à mes nombreuses discussions avec LUC ILLUSIE. Par ailleurs, OFER GABBER m'a autorisé à inclure les résultats qui figurent dans une lettre qu'il m'a adressée [11]. Il a aussi eu la gentillesse de me faire profiter de sa relecture attentive d'une version précédente de ce texte (*cf.* [12]). Je les remercie très chaleureusement pour leur aide précieuse. Je tiens à remercier également MICHEL RAYNAUD et ISABELLE VIDAL pour d'utiles conversations concernant le numéro 5.

2. Propriété cohomologique générique

Soient X un schéma, et \mathcal{F} un champ (en groupoïdes) sur X (muni de la topologie étale). Dans toute la suite, seuls la topologie étale et les champs en groupoïdes seront envisagés et nous omettrons donc ces qualificatifs.

Notons $\pi_0(\mathcal{F})$ le faisceau associé au préfaisceau

$$U/X \longmapsto \{\text{classes d'isomorphismes d'objets de } \mathcal{F}(U)\};$$

c'est aussi le faisceau des sous-gerbes maximales de \mathcal{F} .

Soient U/X un ouvert étale et $x_U \in \text{Ob } \mathcal{F}(U)$; nous noterons $\pi_1(\mathcal{F}, x_U)$ le U -faisceau $\underline{\text{Aut}}(x_U)^{(1)}$.

Si L est un ensemble de nombres premiers, rappelons que le champ \mathcal{F} est *ind-L-fini*, si pour toute section locale x , le faisceau en groupes $\pi_1(\mathcal{F}, x)$ est ind-L-fini au sens de [2, 1.5]. Cela signifie que pour tout point géométrique ξ , la fibre de ce faisceau en ξ s'identifie à la colimite *filtrante* de ses sous-groupes finis de L -torsion. Le champ \mathcal{F} est dit *constructible* si le faisceau $\pi_0(\mathcal{F})$ et les divers $\pi_1(\mathcal{F}, x)$ sont constructibles (*cf. loc. cit.*, 2.3); nous ne considérerons que le cas d'un schéma de base noethérien pour cette dernière notion. Pour tout schéma X , nous noterons L_X l'ensemble des nombres premiers inversibles sur X . (Dans le cas particulier où seul un nombre premier p n'est pas inversible sur X , nous noterons p' l'ensemble L_X .)

Pour alléger les notations, nous désignerons souvent par la même lettre un X -champ et son extension, comme catégorie fibrée, à la catégorie des schémas sur X (*cf.* [13, VII.2.2.7]). De même, nous noterons souvent par des égalités des flèches qui ne sont en fait que des équivalences.

Pour fixer les notations, et motiver les théorèmes généraux qui vont suivre, voici quelques exemples. Le dernier — le plus important pour nos applications — précise le lien entre variation du groupe fondamental en famille (lié à l'étude des faisceaux non abéliens $R^1 f_* G$ pour une famille $f : X \rightarrow S$ et G un groupe fini constant) et le formalisme des images directes de champs que nous allons étudier par la suite.

2.1. Exemples. — Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Z \rightarrow X$ des morphismes de schémas.

Champs de Picard. — À tout complexe $K = [d : \mathcal{L}^{-1} \rightarrow \mathcal{L}^0]$ de faisceaux abéliens sur X , on associe un champ $\text{ch}(K)$. C'est le *champ associé* au *pré-champ* dont le préfaisceau des objets est \mathcal{L}^0 , et dont les homomorphismes entre deux sections locales a et b sur U sont les sections $s \in \mathcal{L}^{-1}(U)$ telles que $ds = b - a$. Cette construction, qui se factorise par $D^{[-1,0]}(X, \mathbf{Z})$, permet de retrouver tous les champs de Picard (strictement commutatifs), définis par P. Deligne et A. Grothendieck dans [6]. Le champ $\text{ch}(K)$ est constructible si et

⁽¹⁾ Justifions rapidement ces notations. Pour toute catégorie \mathcal{C} , on peut définir — fonctoriellement — un ensemble simplicial, son *nerf*, noté $\text{Nerf}(\mathcal{C})$, dont la définition est rappelée par exemple dans [18, VI.2.1]. Si \mathcal{C} est un groupoïde et x un objet de \mathcal{C} , les π_i de son nerf (pointé en x) sont nuls pour $i \geq 2$ (*loc. cit.* 2.6.2). Considérant les $\mathcal{F}(U)$ pour U variable, on obtient, par faisceautisation, les ensembles définis plus haut.

seulement si les faisceaux de cohomologie de K le sont. Le π_0 correspond au \underline{H}^0 , et le π_1 , pointé en la section nulle, au \underline{H}^{-1} . On a

$$g^* \text{ch}(K) = \text{ch}(g^* K) \quad \text{et} \quad f_* \text{ch}(K) = \text{ch}(\tau_{\leq 0} Rf_* K).$$

Champs en catégories discrètes. — Soit \mathcal{F} un faisceau d'ensembles sur X . On peut définir un champ $\text{CD}(\mathcal{F})$ en prenant pour $\text{CD}(\mathcal{F})(U)$ la catégorie discrète construite sur $\mathcal{F}(U)$. Ces groupoïdes sont « totalement disconnexes » en un sens évident. Dans le cas où \mathcal{F} est un faisceau abélien, on a

$$\text{ch}(\mathcal{F}[0]) = \text{CD}(\mathcal{F}).$$

Le champ $\text{CD}(\mathcal{F})$ est constructible si et seulement si $\mathcal{F} = \pi_0(\text{CD}(\mathcal{F}))$ l'est (car les π_1 sont tous nuls). On a

$$g^* \text{CD}(\mathcal{F}) = \text{CD}(g^* \mathcal{F}) \quad \text{et} \quad f_* \text{CD}(\mathcal{F}) = \text{CD}(f_* \mathcal{F}).$$

La situation est donc particulièrement simple. À partir de maintenant, nous considérerons tout faisceau \mathcal{F} comme un champ en l'identifiant à $\text{CD}(\mathcal{F})$.

Champs classifiant. — Soit G un faisceau en groupes sur X . Rappelons qu'un G -torseur sur X est un X -faisceau T muni d'une action de G , qui est localement isomorphe (sur X) à G muni de l'action par translation sur lui-même. On en fait une catégorie en appelant « morphismes » les morphismes de G -faisceaux. Nous noterons $\text{Tors}(G)$ le champ dont la fibre en U est la catégorie des $G|_U$ -torseurs sur U . Dans le cas où G est abélien, on a

$$\text{Tors}(G) = \text{ch}(G[1]).$$

La terminologie « champs de Picard » se justifie par le fait qu'elle englobe le cas $G = \mathbf{G}_m$. Le champ $\text{Tors}(G)$, pour G à nouveau quelconque, est constructible si et seulement si G est constructible ; en effet, $\pi_1(\text{Tors}(G))$, pointé en le G -torseur trivial, n'est autre que G et $\pi_0(\text{Tors}(G)) = \{\emptyset\}$. De même, si G est un groupe constant fini de L-torsion, le champ $\text{Tors}(G)$ est ind-L-fini. On a

$$g^* \text{Tors}(G) = \text{Tors}(G|_Z),$$

mais $f_* \text{Tors}(G)$ n'est pas nécessairement un champ du même type⁽²⁾ : cela dépend des propriétés géométriques du morphisme f . On montre aisément que

- $\pi_0(f_* \text{Tors}(G)) = R^1 f_* G$ (cohomologie non abélienne) et
- $\pi_1(f_* \text{Tors}(G)) = f_* G$ (pointé par l'image du revêtement trivial).

Soient S un schéma, $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme entre S -schémas et \mathcal{F} un champ sur X . Nous dirons que le couple (f, \mathcal{F}) est *cohomologiquement propre* relativement à S si pour tout S -schéma S' , la formation du champ $f_* \mathcal{F}$ commute au changement de base par le morphisme $Y' \stackrel{\text{déf}}{=} Y \times_S S' \rightarrow Y$.

⁽²⁾ Dans le cas où G est abélien, cela résulte du fait que $\tau_{\leq 0}(Rf_* G[1])$ n'est concentré en degré -1 que si $R^1 f_* G = 0$, ce qui est faux en général.

THÉORÈME 2.2. — Soient S un schéma noethérien et $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme entre S -schémas de type fini. Alors :

- a) Il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ vérifiant les conditions suivantes :
 - (i) pour tout ensemble fini E , le champ $f_{U*}E_{X_U}$ est constructible et le couple (f_U, E_{X_U}) est cohomologiquement propre relativement à U ;
 - (ii) pour tout L_U -groupe fini G , le champ $f_{U*}\text{Tors}(G_{X_U})$ est constructible et le couple $(f_U, \text{Tors}(G_{X_U}))$ est cohomologiquement propre relativement à U .
- b) Pour tout champ \mathcal{F} sur X , constructible, $\text{ind-}L_S$ -fini, il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ tel que le champ $f_{U*}\mathcal{F}_{X_U}$ soit constructible et que le couple (f_U, \mathcal{F}_{X_U}) soit cohomologiquement propre relativement à U .

REMARQUE 2.3. — Si $f : X \rightarrow S$ est un morphisme de type fini, on peut montrer que l'image directe d'un faisceau d'ensembles constructible est constructible dès que S est noethérien (cf. [12]). Par contre, la constructibilité de $R^1f_*\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, avec n inversible sur S , peut être mise en défaut avec S noethérien (cf. *loc. cit.*) ; on conjecture que ce phénomène disparaît si S est excellent.

En particulier,

COROLLAIRE 2.4. — Soient k un corps de caractéristique p et $f : X \rightarrow S = \text{Spec}(k)$ un k -schéma de type fini. Pour tout champ \mathcal{F} sur X , constructible, $\text{ind-}p'$ -fini, le champ $f_*\mathcal{F}$ est constructible et de formation compatible aux changements de base $Y \rightarrow S$.

Pour démontrer le théorème, nous ferons appel à un lemme de descente, dont l'énoncé nécessite quelques rappels. Un schéma simplicial X_\bullet est un foncteur contravariant de la catégorie Δ , constituée des ensembles finis $[n] = \{0, \dots, n\}$ où $n \geq 0$, munis des applications croissantes, dans la catégorie des schémas (cf. e.g. [9, ch. 1] dont nous reprenons les notations). À un tel objet est associé un topos étale noté X_\bullet^\sim : ses objets sont les familles de faisceaux étales F_n sur X_n , pour chaque $n \geq 0$, munies, pour chaque morphisme $\alpha : [n] \rightarrow [m]$, d'un X_α -morphisme $F_n \rightarrow F_m$ (c'est-à-dire un morphisme $X_\alpha^*F_n \rightarrow F_m$) satisfaisants les conditions de transitivité évidentes pour les composés. Les champs sur ce topos admettent une description explicite : un champ \mathcal{F} sur X_\bullet^\sim correspond à la donnée d'un champ \mathcal{F}_n sur chaque X_n , de 1-flèches $X_\alpha^*\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_m$ pour chaque morphisme $\alpha : [n] \rightarrow [m]$ dans Δ et d'isomorphismes de transitivité pour les composés, satisfaisant des conditions de cocycles pour les triplets d'applications composables.

Soit $\varepsilon : X_\bullet \rightarrow X$ un schéma simplicial augmenté vers X ; on en déduit un morphisme entre les topos associés : $X_\bullet^\sim \rightarrow X^\sim$. Soit \mathcal{F}_\bullet un champ sur X_\bullet ; le champ $\varepsilon_*\mathcal{F}_\bullet$ se décrit comme la catégorie fibrée dont la fibre au-dessus d'un ouvert étale $U \rightarrow X$ est la catégorie des données de descente, c'est-à-dire