Bull. Soc. math. France
131 (1), 2003, p. 23–39

ENSEMBLES DE TORSION NULLE DES APPLICATIONS DÉVIANT LA VERTICALE

par Sylvain Crovisier

Résumé. — Nous définissons la notion d'ensemble bien ordonné de torsion nulle pour les applications déviant la verticale. Contrairement aux études variationnelles de [14] et [1], nous proposons une approche topologique. On retrouve pour ces ensembles un grand nombre de propriétés des ensembles bien ordonnés décrites dans [11]. En reprenant un argument de G. Hall [7], nous montrons en particulier que pour tout nombre de rotation, il existe un ensemble bien ordonné de torsion nulle.

Abstract (*Twist-free sets of twist maps*). — We give the definition of twist-free ordered set for twist maps. Unlike the variational studies in [14] and [1], we propose a topological approach. Many properties of the ordered sets described in [11] are again satisfied by those sets. From an argument by G. Hall [7], we show in particular that there exists a twist-free ordered set for any rotation number.

1. Introduction, rappels, notations

On considère le tore $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, son revêtement universel $\widetilde{\mathbb{A}} = \mathbb{R}^2$, munis de leur orientation usuelle, ainsi que l'application $\pi : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{A}$. Le relevé d'un point $z = (x, y) \in \mathbb{A}$ sera noté $\tilde{z} = (\tilde{x}, y)$. Si $X \subset \mathbb{A}$, nous noterons $\widetilde{X} = \pi^{-1}(X)$.

Texte reçu le 25 juin 2001, accepté le 22 avril 2002

Sylvain Crovisier, Université Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail :* `Sylvain.Crovisier@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 37E40, 37E45.

Mots clefs. — Applications déviant la verticale, nombre de rotation, ensembles d'Aubry-Mather.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2003/23/$ 5.00

On définit les projections $p_1 : \mathbb{A} \to \mathbb{T}^1$, $\tilde{p}_1 : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{R}$ par $(x,y) \mapsto x$ et $(\tilde{x},y) \mapsto \tilde{x}$. Pour $\tilde{z} = (\tilde{x},y) \in \widetilde{\mathbb{A}}$, nous notons

$$D_i(\tilde{z}) = \big\{(\tilde{x},y'), y' \leq y\big\}, \quad D_s(\tilde{z}) = \big\{(\tilde{x},y'), y' \geq y\big\} \quad \text{et} \quad D(\tilde{z}) = \tilde{p}_1^{-1}(\tilde{x}).$$

L'angle entre deux vecteurs non nuls v, w d'un même espace tangent $\mathrm{T}_z\,\mathbb{A}$ ou $\mathrm{T}_{\tilde{z}}\,\widetilde{\mathbb{A}}$, sera paramétré par le cercle orienté $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si Y est une partie d'un espace topologique, nous noterons $\mathrm{Adh}(Y)$, $\mathrm{Int}(Y)$ et $\mathrm{Fr}(Y)$ son adhérence son intérieur et sa frontière.

Une application déviant la verticale à droite (nous renvoyons à [11, ch. 1.1]) est un difféomorphisme F de $\mathbb{A}$ de classe C^1 homotope à l'identité tel que pour tout relevé $\widetilde{F}$ de F à $\widetilde{\mathbb{A}}$ et tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, les applications

$$y \longmapsto \tilde{p}_1 \circ \widetilde{F}(\tilde{x},y) \quad \text{et} \quad y \longmapsto \tilde{p}_1 \circ \widetilde{F}^{-1}(\tilde{x},y)$$

soient des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ respectivement croissant et décroissant. Nous notons $\mathrm{DV}(\mathbb{A})$ l'ensemble de ces applications et $\widetilde{\mathrm{DV}}(\mathbb{A})$ l'ensemble de leur relevés à $\widetilde{\mathbb{A}}$. On munit ces espaces de la topologie de la C^1-convergence uniforme sur les compacts.

Fixons une application $F \in \mathrm{DV}(\mathbb{A})$. Pour $z \in \mathbb{A}$, nous noterons $\mathcal{O}(z)$ son orbite par F et $\widetilde{\mathcal{O}}(\tilde{z}) = \pi^{-1}(\mathcal{O}(z))$.

Pour $\tilde{z} \in \widetilde{\mathbb{A}}$, on peut considérer l'ensemble (éventuellement vide) des valeurs d'adhérence dans $\mathbb{R}$ de la suite

$$\Big(\frac{\tilde{p}_1 \circ \widetilde{F}^n(\tilde{z}) - \tilde{p}_1(\tilde{z})}{n}\Big)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}.$$

C'est un ensemble qui ne dépend que de $z = \pi(\tilde{z})$, noté $\mathcal{R}(\widetilde{F}, z)$. L'union sur z de ces ensembles forme *l'ensemble de rotation* de $\widetilde{F}$, noté $\mathcal{R}(\widetilde{F})$.

Un ensemble $\Xi \subset \mathbb{A}$ non vide, invariant par F, et son relevé $\widetilde{\Xi} \subset \widetilde{\mathbb{A}}$ sont dits *bien ordonnés* (voir [3]) si

i) $p_1 : \Xi \to \mathbb{T}^1$ est injective,

ii) $\tilde{p}_1(\tilde{z}) < \tilde{p}_1(\tilde{z}')$ implique $\tilde{p}_1(\widetilde{F}(\tilde{z})) < \tilde{p}_1(\widetilde{F}(\tilde{z}'))$ quels que soient $\tilde{z}, \tilde{z}' \in \widetilde{\Xi}$.

L'ensemble Ξ est alors le graphe d'une application lipschitzienne au-dessus d'un sous-ensemble de $\mathbb{T}^1 = p_1(\mathbb{A})$ (voir [8, chap. 1]). Il existe un unique réel ρ, le nombre de rotation de $\widetilde{\Xi}$, tel que pour tout $\tilde{z} \in \widetilde{\Xi}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$-1 < \tilde{p}_1 \circ \widetilde{F}^n(\tilde{z}) - \tilde{p}_1(\tilde{z}) - n\rho < 1.$$

Un ensemble bien ordonné minimal de nombre de rotation rationnel est une orbite périodique. Un ensemble bien ordonné minimal de nombre de rotation irrationnel est un graphe invariant ou un ensemble de Cantor.

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées (voir [9], [6], [10]) :

(BO1) Si Ξ est un ensemble bien ordonné, $\mathrm{Adh}(\Xi)$ est un ensemble compact bien ordonné.

(BO2) Si $(\widetilde{\Xi}_n)$ est une suite d'ensembles fermés bien ordonnés associée à une suite $(\widetilde{F}_n)$ d'applications déviant la verticale convergeant vers $\widetilde{F}$ dans $\widetilde{\mathrm{DV}}(\mathbb{A})$ et si (Ξ_n) converge vers un ensemble compact Ξ pour la topologie de Hausdorff, alors Ξ est bien ordonné. De plus, la suite des nombres de rotation (ρ_n) de (Ξ_n) converge vers le nombre de rotation ρ de Ξ.

(BO3) Pour tout $\rho \in \mathcal{R}(\widetilde{F})$, il existe un ensemble bien ordonné de nombre de rotation ρ pour $\widetilde{F}$.

Remarque 1.1. — Usuellement (voir [11]), on définit l'ensemble de rotation $\mathcal{R}(\widetilde{F})$ de $\widetilde{F}$ comme l'ensemble des nombres de rotation des ensembles bien ordonnés de $\widetilde{F}$. La propriété (BO3) établit l'équivalence avec notre définition de $\mathcal{R}(\widetilde{F})$ (voir [10] et [11, chap. 1.5]).

Soit Ξ un ensemble bien ordonné. L'ensemble α-limite (resp. ω-limite) de tout point $z \in \Xi$ est un ensemble bien ordonné minimal $\alpha(z)$ (resp. $\omega(z)$) inclus dans $\mathrm{Adh}(\Xi)$. L'ensemble bien ordonné $\alpha(\Xi) = \bigcup_z \alpha(z)$ (resp. $\omega(\Xi) = \bigcup_z \omega(z)$) est réunion d'orbites périodiques si le nombre de rotation de Ξ est rationnel ou un ensemble fermé minimal sinon.

En section 2.1, nous définissons la notion d'ensemble bien ordonné de torsion nulle. Le nombre de torsion des orbites d'une application de l'anneau déviant la verticale qui préserve les aires a déjà été introduit dans [14] (*amount of rotation*) et [1] (*twist number*). Dans ces études le cadre variationnel était privilégié. Nous proposons ici de les compléter en donnant quelques propriétés topologiques. Remarquons aussi que l'hypothèse de préservation des aires est inutile ici.

Nous montrons que les propriétés (BO1–BO3) sont encore satisfaites si l'on remplace « ensemble bien ordonné » par « ensemble bien ordonné de torsion nulle ». En particulier, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 1.2. — *Soit $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathrm{DV}}(\mathbb{A})$. Si $\rho \in \mathcal{R}(\widetilde{F})$, il existe un ensemble bien ordonné pour $\widetilde{F}$ de nombre de rotation ρ et de torsion nulle.*

Le point essentiel, lorsque ρ est rationnel, est de trouver des orbites périodiques de torsion nulle.

Dans le cadre variationnel, le nombre de torsion peut aussi être lu à partir des indices de Morse des points critiques d'une fonctionnelle associée à F (voir [1]). La première orbite bien ordonnée donnée par les théorèmes d'existences de [2], [13] correspond à des minima de la fonctionnelle et est toujours de torsion nulle.

Un des ingrédients de notre démonstration s'inspire d'une idée de Hall (voir [7]) pour montrer l'existence d'orbites bien ordonnées périodiques de nombre de rotation p/q lorsque $\widetilde{F}$ possède des orbites mal ordonnées périodiques de nombre de rotation p/q. Nous avons essayé de la reprendre et de la développer de façon rigoureuse en l'adaptant à notre situation.

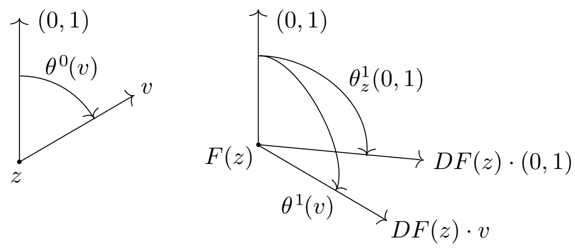

FIGURE 1. Définition de $\theta(v) = \theta^1(v) - \theta^0(v)$

Un grand intérêt des ensembles de torsion nulle est justifié par la remarque suivante : si z possède une orbite périodique de torsion nulle, et si z possède une variété invariante γ qui est une courbe C^1, alors localement en z, γ est un graphe au-dessus de $\mathbb{T}^1$. Plus précisément, si z est q-périodique et si $v \in T_zM \setminus \{0\}$ est une direction invariante de $\mathrm{D}F^q(z)$, v ne peut pas être le vecteur vertical $(0,1)$. En effet, puisque F dévie la verticale à droite, l'angle entre v et $\mathrm{D}F^q(z) \cdot v$ ne pourrait s'annuler et devrait être strictement négatif (voir section 2.2). Ceci contredirait l'hypothèse de torsion nulle. C'est le point de départ dans [4], [5] de la généralisation des langues d'Arnol'd aux applications standards dissipatives de l'anneau.

Remerciements. — Je remercie L. GUILLOU, P. LE CALVEZ et J.-C. YOCCOZ pour leur lecture attentive et leurs précieuses remarques.

2. Ensembles de torsion nulle

Nous fixons une application $F \in \mathrm{DV}(\mathbb{A})$ et un relevé $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathrm{DV}}(\mathbb{A})$.

2.1. Définition. — Soit $z \in \mathbb{A}$ et $v \in \mathrm{T}_z\,\mathbb{A} \setminus \{0\}$. Nous noterons $\theta^0(v)$ le relevé à $\mathbb{R}$ contenu dans $]-1,0]$ de l'angle orienté entre le vecteur vertical $(0,1)$ et v. Nous notons

$$\theta^1_z(0,1) = \theta^0\big(\mathrm{D}F(z)\cdot(0,1)\big)$$

et plus généralement $\theta^1(v)$ le relevé à $\mathbb{R}$ contenu dans $]\theta^1_z(0,1)-1, \theta^1_z(0,1)]$ de l'angle orienté entre $(0,1)$ et $\mathrm{D}F(z)\cdot v$ (voir figure 1). On définit enfin

$$\theta(v) = \theta^1(v) - \theta^0(v).$$

C'est un relevé à $\mathbb{R}$ de l'angle entre v et $\mathrm{D}F(z)\cdot v$.

L'application $\theta : \mathrm{T}_z\,\mathbb{A} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ est l'unique fonction continue qui relève l'angle entre v et $\mathrm{D}F(z)\cdot v$ et pour laquelle $\theta(0,1) \in \,]-\frac{1}{2}, 0[$. De plus, $\theta(v)$ dépend continûment de F et de $v \in \mathrm{T}\mathbb{A}$.

On définit aussi

$$\theta_n(v) = \begin{cases} \sum_{0\le k\le n-1} \theta\big(\mathrm{D}F^k(z)\cdot v\big) & \text{si } n \ge 0,\\ -\theta_{-n}\big(\mathrm{D}F^n(z)\cdot v\big) & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

DÉFINITION 2.1. — On dit qu'un ensemble invariant $X \subset \mathbb{A}$ pour une application $F \in \mathrm{DV}(\mathbb{A})$ et son relevé $\widetilde{X}$ sont *de torsion nulle* si pour tout $z \in X$ et tout $v \in \mathrm{T}_z\,\mathbb{A} \setminus \{0\}$,

$$\frac{\theta_n(v)}{n} \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0. \tag{1}$$

REMARQUE 2.2. — Pour tout $z \in \mathbb{A}$, $v, v' \in \mathrm{T}_z\,\mathbb{A} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on constate que

$$\big|\theta_n(v) - \theta_n(v')\big| < \frac{1}{2}\cdot \tag{2}$$

Dans cette définition, pour chaque $z \in X$, il suffit donc que (1) soit satisfait par un seul vecteur v de $\mathrm{T}_z\,\mathbb{A} \setminus \{0\}$ pour l'être par tous.

2.2. Nombre de torsion des orbites périodiques. — Considérons une orbite périodique z_0, $z_1 = F(z_0), \dots, z_q = F^q(z_0) = z_0$. On peut définir plus généralement son *nombre de torsion* : c'est la quantité

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta_{qn}(v)}{n} = \lim_{n\to-\infty} \frac{\theta_{qn}(v)}{n}\cdot \tag{3}$$

Elle ne dépend pas du vecteur $v \in \mathrm{T}_{z_0}\,\mathbb{A} \setminus \{0\}$ choisi, ni du point initial z_0 de l'orbite.

Lorsque v est le vecteur vertical $(0,1)$, et $n \in \mathbb{N}$, par déviation de la verticale, $\theta_n(v)$ est toujours négatif.

Ainsi, le nombre de torsion est toujours négatif ou nul. Si $\mathrm{D}F^q(z_0)$ possède une valeur propre réelle positive (resp. négative), le nombre de torsion est un entier (resp. demi-entier non entier). Si $\mathrm{D}_{z_0}F^q$ possède une valeur propre complexe, le nombre de torsion n'est pas demi-entier mais donne l'argument des valeurs propres. Si l'on perturbe F et si l'on suit continûment l'orbite de z_0, le nombre de torsion varie également de façon continue.

Remarquons que si z possède une orbite périodique de torsion nulle, pour tout $v \in \mathrm{T}_z\,\mathbb{A} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $1 < \theta_n(v) < 1$.

2.3. Premières propriétés. — Les ensembles bien ordonnés ont de bonnes propriétés de torsion :

PROPOSITION 2.3. — *Soit z un point d'accumulation d'un ensemble Ξ bien ordonné et $v \in \mathrm{T}_z\,\mathbb{A} \setminus \{0\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$-1 < \theta_n(v) < 1.$$