Bull. Soc. math. France
131 (3), 2003, p. 421–433

HAUTEUR DES CORRESPONDANCES DE HECKE

par Pascal Autissier

Résumé. — L'objectif de cet article est de mesurer la complexité arithmétique de la courbe modulaire $X_0(N)$ en fonction du niveau N. Pour ce faire, on utilise un morphisme fini (de degré 1 sur son image) de $X_0(N)$ vers une variété fixe $X(1) \times X(1)$ et on calcule la hauteur au sens d'Arakelov de l'image T_N de ce morphisme. La hauteur employée est directement reliée à la hauteur de Faltings des courbes elliptiques.
On a besoin pour cela de considérer une théorie d'Arakelov pour les faisceaux inversibles hermitiens L_1^2-singuliers (au lieu de C^∞ classiquement).
On en déduit des résultats sur la hauteur (de Faltings) de courbes elliptiques isogènes, ainsi que sur des moyennes de hauteurs de courbes elliptiques à multiplication complexe (*i.e.* une formule de Kronecker arithmétique).

Abstract (*The height of the Hecke correspondences*). — The goal of this paper is the measure of the arithmetic complexity of the modular curve $X_0(N)$, as a function of the level N. For this, we use a finite morphism (of degree 1 over its image) from $X_0(N)$ to a fixed variety $X(1) \times X(1)$, and we calculate the (Arakelov) height of the image T_N of this morphism. This height is related to the Faltings height of elliptic curves.
For this, we need to consider an Arakelov theory for L_1^2-singular hermitian line bundles (instead of C^∞ ones classically).
As an application, we find results on the (Faltings) height of isogenous elliptic curves, and on averages of heights of CM elliptic curves (*i.e.* an arithmetic Kronecker formula).

Texte reçu le 24 septembre 2002, accepté le 24 janvier 2003

Pascal Autissier, Département de Mathématiques, bât. 425, Université Paris XI, 91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail :* pascal.autissier@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F32, 14G40, 11G50.

Mots clefs. — Hauteur, correspondance, théorie d'Arakelov, courbe modulaire, courbe elliptique.

1. Théorie des hauteurs

1.1. Généralités

Définitions 1.1. — Une *variété arithmétique* est un schéma X intègre, projectif et plat sur $\mathbb{Z}$, tel que la fibre générique $X_{\mathbb{Q}}$ soit lisse sur $\mathbb{Q}$.

Soient K un corps de nombres, et O_K son anneau des entiers. Une variété arithmétique *sur* O_K est un O_K-schéma X tel que X soit une variété arithmétique et que la fibre générique X_K soit géométriquement irréductible sur K.

Remarquons que si X_1 et X_2 sont des variétés arithmétiques sur O_K, alors le produit $X_1 \times_{O_K} X_2$ est aussi une variété arithmétique sur O_K.

Définitions 1.2. — Soient X une variété arithmétique, et W une partie fermée de $X(\mathbb{C})$ stable par conjugaison complexe. Un *faisceau inversible hermitien* sur X *singulier* le long de W est un couple $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \|\ \|)$, formé d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X, et d'une famille $\|\ \|$ de normes hermitiennes sur $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ variant de manière continue sur $X(\mathbb{C}) - W$ et invariante par conjugaison complexe.

On note $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ le $(1;1)$-courant de courbure de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}$ sur $X(\mathbb{C}) - W$.

Lorsque W est vide et la famille $\|\ \|$ est C^∞ sur $X(\mathbb{C})$, le faisceau inversible hermitien $\widehat{\mathcal{L}}$ est dit C^∞. Les classes d'isométrie de faisceaux inversibles hermitiens C^∞ sur X forment un groupe $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ pour le produit tensoriel.

Soit X une variété arithmétique. On désigne par $Z_1(X)$ le groupe des 1-cycles (*i.e.* combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires de sous-schémas fermés intègres de dimension 1) sur X.

Un *point entier* de X est un fermé intègre de X qui est horizontal (*i.e.* plat sur $\mathbb{Z}$) et de dimension 1.

Soit $\widehat{\mathcal{L}}$ un faisceau inversible hermitien singulier le long d'un W. Nous notons $Z_1(X;W)$ le groupe des $D \in Z_1(X)$ tels que le support de $D_{\mathbb{C}}$ ne rencontre pas W.

Définitions 1.3. — Soit Y un fermé intègre de X tel que $Y \in Z_1(X;W)$ en tant que cycle. La *hauteur* de Y relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ est le réel $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)$ défini par :

- si Y est horizontal, alors $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) = \widehat{\deg}(\widehat{\mathcal{L}}_{|Y})$ où $\widehat{\deg}$ est le degré arithmétique ;
- si Y est vertical au-dessus d'un nombre premier p, alors $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) = \deg_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{L}_{|Y}) \ln p$.

Dans le cas Y horizontal (*i.e.* Y est un point entier), on définit la *hauteur normalisée* $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)$ de Y relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ par

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) = \frac{h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)}{[k(Y) : \mathbb{Q}]}.$$

En outre, par $\mathbb{Z}$-linéarité, on définit la hauteur $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(D)$ pour tout $D \in Z_1(X;W)$.

1.2. Correspondances. — Commençons ce paragraphe par quelques rappels de la théorie d'Arakelov généralisée de Bost [2] dans le cas des surfaces arithmétiques (*i.e.* variétés arithmétiques de dimension 2).

Soient X une surface arithmétique, W une partie finie de $X(\mathbb{C})$ stable par conjugaison complexe, et $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \| \ \|)$ un faisceau inversible hermitien singulier le long de W. On dit que $\widehat{\mathcal{L}}$ est L_1^2*-singulier* le long de W lorsque pour une (donc pour toute) famille $\| \ \|'$ telle que $(\mathcal{L}; \| \ \|')$ soit C^∞, la fonction $\ln \| \ \| / \| \ \|'$ est L_1^2 (*cf.* [2, p. 254]) sur $X(\mathbb{C})$.

La courbure $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ se prolonge alors en un courant sur $X(\mathbb{C})$.

Les classes d'isométrie de faisceaux inversibles hermitiens L_1^2-singuliers (le long d'un certain W) forment un groupe $\widehat{\mathrm{Pic}}(X; L_1^2)$.

La théorie de Bost [2] (*cf.* p. 274) définit une forme bilinéaire symétrique que l'on notera $\langle\,.\,\rangle : \widehat{\mathrm{Pic}}(X; L_1^2) \times \widehat{\mathrm{Pic}}(X; L_1^2) \to \mathbb{R}$.

Pour $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X; L_1^2)$, la *hauteur* de X relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ est le réel noté $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$ que l'on définit par $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) = \langle \widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}} \rangle$. On a la propriété suivante :

PROPOSITION 1.4. — *Soit $\widehat{\mathcal{L}}$ un faisceau inversible hermitien L_1^2-singulier le long d'un W tel que $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ soit localement L^t sur $X(\mathbb{C}) - W$ pour un certain réel $t > 1$. Soient $n \geq 1$ et s une section rationnelle globale non nulle de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ sur X tel que le support de* $\mathrm{div}(s_{\mathbb{C}})$ *ne rencontre pas W. Alors on a*

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) n = h_{\widehat{\mathcal{L}}}\big(\mathrm{div}(s)\big) - \int_{X(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\| \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}.$$

Démonstration. — C'est la propostion 5.3 de [2], où l'on a remplacé l'hypothèse L^∞ par l'hypothèse L^t grâce au lemme 5.2 de [2]. □

On a également une formule de projection :

Soit $f : X_1 \to X_2$ un morphisme surjectif de surfaces arithmétiques. Il est alors génériquement fini ; soit e son degré (générique).

Si $\widehat{\mathcal{L}}$ est un faisceau inversible hermitien sur X_2 L_1^2-singulier le long d'un W, alors $f^*\widehat{\mathcal{L}}$ est un faisceau inversible hermitien sur X_1 L_1^2-singulier le long de $f_{\mathbb{C}}^{-1}(W)$. Cela induit un homomorphisme $f^* : \widehat{\mathrm{Pic}}(X_2; L_1^2) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(X_1; L_1^2)$.

On a alors $\langle f^*\widehat{\mathcal{L}} \cdot f^*\widehat{\mathcal{M}} \rangle = \langle \widehat{\mathcal{L}} \cdot \widehat{\mathcal{M}} \rangle e$ pour tout $(\widehat{\mathcal{L}}; \widehat{\mathcal{M}}) \in \mathrm{Pic}(X_2; L_1^2)^2$. En particulier, on a $h_{f^*\widehat{\mathcal{L}}}(X_1) = h_{\widehat{\mathcal{L}}}(X_2) e$ pour tout $\widehat{\mathcal{L}} \in \mathrm{Pic}(X_2; L_1^2)$.

On s'intéresse maintenant au cas particulier suivant : soient K un corps de nombres, X une surface arithmétique sur O_K et $\widehat{\mathcal{M}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X; L_1^2)$. On pose $P = X \times_{O_K} X$, et $\widehat{\mathcal{L}} = \mathrm{pr}_1^* \widehat{\mathcal{M}} \otimes \mathrm{pr}_2^* \widehat{\mathcal{M}}$, où les pr_i sont les projections $P \to X$.

Une *correspondance* T de X est un diviseur de Weil intègre sur P tel que les projections restreintes $\mathrm{pr}_i : T \to X$ soient surjectives. On définit la *hauteur* $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(T)$ de T relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ de la manière suivante :

Soit $f : T' \to T$ un morphisme surjectif de degré 1 (*i.e.* birationnel), avec T' surface arithmétique. On pose $\pi_i = \mathrm{pr}_i \circ f$. On remarque que l'on a $f^*\widehat{\mathcal{L}} = \pi_1^*\widehat{\mathcal{M}} \otimes \pi_2^*\widehat{\mathcal{M}}$ dans $\widehat{\mathrm{Pic}}(T'; L_1^2)$. On pose alors $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(T) = h_{f^*\widehat{\mathcal{L}}}(T')$. La formule de projection assure que ce réel ne dépend pas du choix de T' et de f (et il existe toujours un tel couple $(T'; f)$: par exemple, la normalisation de T).

Notons que lorsque $\widehat{\mathcal{M}}$ est C^∞, cette définition coïncide celle de [3, p. 945] (hauteur de T en tant que 2-cycle sur P).

Remarque 1.5. — Soit T un diviseur de Weil intègre horizontal sur P qui n'est pas une correspondance. Alors T est nécessairement une surface arithmétique de la forme $T = \mathrm{pr}_1^* Y = Y \times_{O_K} X$ ou $T = \mathrm{pr}_2^* Y = X \times_{O_K} Y$, avec Y point entier de X.

Si de plus $Y \in Z_1(X; W)$, alors on a (par bilinéarité de la forme $\langle\, .\, \rangle$) :

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}_{|T}}(T) = 2 \deg_K(\mathcal{M}_K) h_{\widehat{\mathcal{M}}}(Y) + [k(Y) : K] h_{\widehat{\mathcal{M}}}(X).$$

2. Préliminaires modulaires

Soient $\mathcal{H}$ le demi-plan supérieur, et $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. On note l'action du groupe modulaire $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\overline{\mathcal{H}}$ de la manière suivante :

$$\text{si } \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma(1) \quad \text{et} \quad \tau \in \overline{\mathcal{H}}, \quad \text{alors} \quad \gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\cdot$$

On pose

$$M_1 = \Gamma(1) \backslash \overline{\mathcal{H}}.$$

La fonction elliptique modulaire j induit un isomorphisme $j : M_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Soit

$$\mu = \frac{3i\mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\overline{\tau}}{2\pi(\mathrm{Im}\tau)^2} = \frac{3\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{\pi y^2}$$

la (1 ;1)-forme de Poincaré, qui induit une mesure de probabilité sur M_1.

Pour $\tau \in \mathcal{H}$, on pose $q = \mathrm{e}^{2i\pi\tau}$ et $\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$.

Soient ζ la fonction de Riemann, et κ_0 la constante d'Euler. Dans toute la suite, on note κ_1 la constante

$$\kappa_1 = \frac{6}{\pi^2}\zeta'(2) - \kappa_0 - \ln(2\pi^2) + \frac{1}{2} = 12\zeta'(-1) - \ln \pi - \frac{1}{2}\cdot$$

Pour $(\tau_1; \tau_2) \in \mathcal{H}^2$ avec $\tau_1 \neq \tau_2$, on pose $y_i = \mathrm{Im}\tau_i$, et

$$g(\tau_1; \tau_2) = -2 \ln\Big(\big|j(\tau_1) - j(\tau_2)\big| \cdot \big|\Delta(\tau_1)\Delta(\tau_2)\big| y_1^6 y_2^6\Big).$$

La fonction g peut être vue comme une fonction sur $(\Gamma(1)\backslash\mathcal{H})^2$ privé de la diagonale. C'est une fonction de Green pour la mesure μ. En particulier, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1. — *Pour tout* $\tau_1 \in \mathcal{H}$, *on a* $\int_{M_1} g(\tau_1;\tau)\mu(\tau) = 24\kappa_1$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la « formule de Jensen modulaire » de Rohrlich [19] à $f(\tau) = (2\pi)^{-12}(j(\tau) - j(\tau_1))\Delta(\tau)$, qui est une forme modulaire de poids 12. □

Pour un entier $N \geq 1$, on pose

$$\mathcal{C}_N = \Big\{ \gamma = \begin{bmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ 0 & d_\gamma \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z});\ a_\gamma d_\gamma = N,\\ a_\gamma \geq 1,\ 0 \leq b_\gamma \leq d_\gamma - 1 \text{ et } a_\gamma \wedge b_\gamma \wedge d_\gamma = 1 \Big\}.$$

On pose

$$e_N = \#\mathcal{C}_N = N \prod_{\substack{p \mid N \\ p \text{ premier}}} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big).$$

Il existe un unique polynôme $\Phi_N \in \mathbb{Z}[X;Y]$ (le polynôme modulaire d'ordre N, *cf.* [21, p. 109–110]) tel que

$$\forall \tau \in \mathcal{H}, \quad \Phi_N\big(X; j(\tau)\big) = \prod_{\gamma \in \mathcal{C}_N} \big(X - j(\gamma\tau)\big).$$

On a $\Phi_1 = X - Y$ et $\Phi_N(X;Y) = \Phi_N(Y;X)$ pour tout $N \geq 2$.

Les résultats combinatoires suivants nous seront utiles dans la suite :

LEMME 2.2. — *Pour tout* $N \geq 2$ *et tout* $\tau \in \mathcal{H}$, *on a*

$$\prod_{\gamma \in \mathcal{C}_N} \Delta(\gamma\tau) = \big[-\Delta(\tau)\big]^{e_N}.$$

Démonstration. — Le quotient des deux membres est une fonction méromorphe sur M_1 sans zéro ni pôle sur $M_1 - \{\infty\}$, donc est une constante. On calcule alors cette constante en comparant le premier terme non nul (*i.e.* celui de degré e_N) du q-développement de chaque membre. □

Soient $N \geq 1$ et $N = \prod_i p_i^{r_i}$ sa décomposition en facteurs premiers. Posons

$$\lambda_N = \sum_i \frac{p_i^{r_i} - 1}{p_i^{r_i - 1}(p_i^2 - 1)} \ln p_i.$$

On remarque que l'on a $\lambda_N = O(\ln\ln N)$.

LEMME 2.3. — *Avec ces notations, on a*

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{C}_N} \ln \frac{d_\gamma}{a_\gamma} = e_N(\ln N - 2\lambda_N).$$