Bull. Soc. math. France
131 (4), 2003, p. 465–482

REPRÉSENTATIONS DE DIMENSION FINIE DE L'ALGÈBRE DE CHEREDNIK RATIONNELLE

PAR CHARLOTTE DEZÉLÉE

RÉSUMÉ. — On donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de modules de dimension finie sur l'algèbre de Cherednik rationnelle associée à un système de racines.

ABSTRACT (*Finite dimensional representations of the rational Cherednik algebra*)
We give a necessary and sufficient condition for the existence of finite dimensional modules on the rational Cherednik algebra associated to a root system.

1. Introduction et notations

Soient $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\ell \geq 1$, $R \subset \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^*$ un système de racines réduit, W le groupe de Weyl correspondant et $\mathfrak{a} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$. On note r_α la réflexion associée à la racine α et $\alpha^\vee \in \mathfrak{a}$ la coracine de α. On fixe une fonction de multiplicité $k : R \to \mathbb{C}$ sur l'ensemble des racines, donc $k_{w(\alpha)} = k_\alpha$ pour tous $\alpha \in R$, $w \in W$. Soit

$$\mathcal{P} = S(\mathfrak{a}^*) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}_n,$$

où $\mathcal{P}_n = S^n(\mathfrak{a}^*)$, l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}^*$. On pose $\mathcal{P}_+ = \oplus_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$. Un élément $f \in \mathcal{P}$ peut être identifié à la multiplication par f dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})$ et

Texte reçu le 7 mars 2002, révisé le 10 juin 2002, accepté le 11 avril 2002

CHARLOTTE DEZÉLÉE, Département de mathématiques, Université de Brest, 29285 Brest Cedex (France) • *E-mail :* `Charlotte.Dezelee@univ-brest.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 16Sxx, 33Dxx, 17Bxx.
Mots clefs. — Opérateur de Dunkl, racine, groupe de Weyl.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2003/465/$ 5.00
© Société Mathématique de France

l'on fait opérer W de façon naturelle sur $\mathcal{P}$. Si ∂_y est le champ de vecteurs associé à $y \in \mathfrak{a}$ on définit alors l'opérateur de Dunkl $T_y = T_y(k) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})$ par

$$T_y(k) = \partial_y + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R} k_\alpha \frac{\langle \alpha, y\rangle}{\alpha}(1 - r_\alpha) = \partial_y + \sum_{\alpha\in R^+} k_\alpha \frac{\langle \alpha, y\rangle}{\alpha}(1 - r_\alpha),$$

où $R^+ \subset R$ est un système de racines positives. On sait que $T : y \mapsto T_y$ s'étend en un isomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{a})$ sur

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(k) = \mathbb{C}[T_y : y \in \mathfrak{a}]$$

(*cf.* [7, th. 1.5] ou [5, th. 2.12]). On posera

$$\mathcal{S}_n = T\big(S^n(\mathfrak{a})\big),$$

de sorte que $\mathcal{S} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{S}_+$ avec $\mathcal{S}_+ = \oplus_{n\geq 1}\mathcal{S}_n$.

L'algèbre de Cherednik rationnelle (*cf.* [6]), notée $\mathcal{H}(k)$ ou $\mathcal{H}$, est la sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})$ engendrée par les $w \in W$, $x \in \mathfrak{a}^*$ et les T_y, $y \in \mathfrak{a}$. Ces générateurs sont liés par les relations suivantes :

1) $[T_y, x] = \langle y, x\rangle + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R} k_\alpha \langle y, \alpha\rangle\langle \alpha^\vee, x\rangle r_\alpha$;
2) $wxw^{-1} = w(x)$;
3) $wT_yw^{-1} = T_{w(y)}$.

Rappelons [6, cor. 4.4] que $\mathcal{H}$ vérifie un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW). En effet, si l'on pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{H}_n = \bigoplus_{\substack{j-i=n,\\ w\in W}} \mathcal{S}_i w \mathcal{P}_j = \bigoplus_{\substack{j-i=n,\\ w\in W}} \mathcal{P}_j w \mathcal{S}_i,$$

on a alors

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n = \mathcal{P} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathcal{S} = \mathcal{S} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathcal{P}.$$

Il résulte de [1, th. 2.2] que pour des valeurs génériques de la fonction k, l'algèbre $\mathcal{H}(k)$ ne possède pas de représentation de dimension finie. L'objet de ce travail est de chercher des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des $\mathcal{H}$-modules de dimension finie et de déterminer certaines de leurs propriétés. Les principaux résultats obtenus sont les suivants. Dans la section 4 on montre (théorème 4.1) que tout $\mathcal{H}(k)$-module irréductible de dimension finie est isomorphe à l'unique quotient simple d'un module de Verma généralisé (*cf.* [5]) ; on en déduit à la section 5 une caractérisation des multiplicités k pour lesquelles des $\mathcal{H}(k)$-modules de dimension finie existent et une description de ces derniers (théorème 5.4, remarque 5.5 et proposition 5.6). La section 6 est consacrée à des exemples, notamment le cas d'un groupe de Weyl en rang 2 y est (presque) complètement traité.

2. Propriétés de $\mathcal{H}$

On définit [2, p. 144] une forme bilinéaire symétrique définie positive W-invariante sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^*$ (que l'on étend à $\mathfrak{a}^*$) en posant

$$B^*(x,z) = \sum_{\alpha\in R} \langle \alpha^\vee, x\rangle\langle\alpha^\vee, z\rangle.$$

On peut alors identifier $\mathfrak{a}^*$ à $\mathfrak{a}$ via $x \mapsto B(x)$, où $B(x)$ est caractérisé par

$$B^*(x,z) = \big\langle B(x), z\big\rangle.$$

Ainsi B est un isomorphisme W-linéaire et l'on a

$$B(\alpha) = \frac{1}{2}B^*(\alpha,\alpha)\alpha^\vee, \quad \big\langle B(x), B^{-1}(y)\big\rangle = \langle y, x\rangle,$$

pour tous $\alpha \in R$ et $(x,y) \in \mathfrak{a}^* \times \mathfrak{a}$. On en déduit que

$$\sum_{\alpha\in R} k_\alpha \langle y,\alpha\rangle\langle\alpha^\vee, x\rangle r_\alpha = \sum_{\alpha\in R} k_\alpha \big\langle B(x),\alpha\big\rangle\big\langle \alpha^\vee, B^{-1}(y)\big\rangle r_\alpha.$$

En utilisant cette relation on montre que l'on peut définir un anti-automorphisme involutif σ de $\mathcal{H}$ par

$$\sigma(x) = T_{B(x)}, \quad \sigma(T_y) = B^{-1}(y), \quad \sigma(w) = w^{-1},$$

pour tous $x \in \mathfrak{a}^*$, $y \in \mathfrak{a}$, $w \in W$. On peut aussi définir un automorphisme ϕ de $\mathcal{H}$ (d'ordre 4) en posant

$$\phi(x) = -T_{B(x)}, \quad \phi(T_y) = B^{-1}(y), \quad \phi(w) = w.$$

On remarquera que ϕ et σ échangent $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Une application bilinéaire sur $\mathcal{H}$. — Grâce à PBW, il vient :

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}W \oplus (\mathcal{P}_+\mathcal{H} + \mathcal{H}\mathcal{S}_+).$$

On peut donc définir la projection $\pi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}W$ parallèlement à $\mathcal{P}_+\mathcal{H} + \mathcal{H}\mathcal{S}_+$. Comme W laisse stables $\mathcal{P}_+$ et $\mathcal{S}_+$, π est un morphisme de W-modules pour l'action par multiplication à gauche, ou à droite de W, *i.e.* $\pi(wh) = w\pi(h)$ et $\pi(hw) = \pi(h)w$, $h \in \mathcal{H}$, $w \in W$; observons également que $\pi(\sigma(h)) = \sigma(\pi(h))$. Définissons une application bilinéaire $\beta : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}W$ par

$$\forall a,b \in \mathcal{H}, \quad \beta(a,b) = \pi\big(\sigma(a)b\big).$$

Les assertions du lemme suivant résultent de calculs immédiats.

Lemme 2.1. — *On a, pour tous $a,b,h \in \mathcal{H}$ et $w,s \in W$:*

1) $\beta(a,b) = \sigma(\beta(b,a))$;
2) $R(\beta) = \{a \in \mathcal{H} : \forall b \in \mathcal{H},\ \beta(a,b) = 0\} = \{a \in \mathcal{H} : \forall b \in \mathcal{H},\ \beta(b,a) = 0\}$;
3) $\beta(aw, bs) = w^{-1}\beta(a,b)s$ *(on dira que β est σ-linéaire) ;*
4) $\beta(ha,b) = \beta(a,\sigma(h)b)$ *(on dira que β est σ-symétrique) ;*
5) $R(\beta)$ *contient* $\mathcal{H}\mathcal{S}_+$ *et* $\sigma(\mathcal{H}\mathcal{S}_+) = \mathcal{P}_+\mathcal{H}$.

On a $\mathcal{H}_n\mathcal{H}_m \subset \mathcal{H}_{n+m}$ et il découle de PBW que $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{P}_+\mathcal{H} + \mathcal{H}\mathcal{S}_+$ lorsque $p \neq 0$; on en déduit que, pour tous $m \neq n$,

$$\beta(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n) = \pi\big(\sigma(\mathcal{H}_m)\mathcal{H}_n\big) = \pi(\mathcal{H}_{-m}\mathcal{H}_n) \subset \pi(\mathcal{H}_{n-m}) = 0.$$

Comme $\mathcal{H} = (\mathcal{P}\otimes\mathbb{C}W)\bigoplus\mathcal{H}\mathcal{S}_+$, on peut considérer β comme une application bilinéaire σ-symétrique sur $\mathcal{H}/\mathcal{H}\mathcal{S}_+ \simeq \mathcal{P}\otimes\mathbb{C}W$ en posant :

$$\forall p, q \in \mathcal{P},\ \ \forall w, s \in \mathbb{C}W, \quad \beta(p\otimes w, q\otimes s) = \sigma(w)\beta(p,q)s.$$

On remarquera que $\beta(\mathcal{P}_n\otimes\mathbb{C}W, \mathcal{P}_m\otimes\mathbb{C}W) = 0$ si $n \neq m$. Donc β est déterminée par ses restrictions aux espaces vectoriels de dimension finie $\mathcal{P}_n \otimes \mathbb{C}W$.

Équivalence de catégories. — Soit $\tau : W \to \{\pm 1\}$ une représentation de dimension 1. Définissons une fonction de multiplicité $k^\tau : R \to \mathbb{C}$ par

$$k^\tau(\alpha) = \tau(r_\alpha)k_\alpha.$$

Il résulte des relations 1), 2), 3) entre les générateurs de $\mathcal{H}(k)$ (*cf.* §1) que l'on peut définir un morphisme d'algèbre $\epsilon_\tau : \mathcal{H}(k) \to \mathcal{H}(k^\tau)$ en posant

$$\epsilon_\tau(x) = x, \quad \epsilon_\tau\big(T_y(k)\big) = T_y(k^\tau), \quad \epsilon_\tau(w) = \tau(w)w$$

pour tous $x \in \mathfrak{a}^*$, $y \in \mathfrak{a}$, $w \in W$. Il est clair que ϵ_τ est un isomorphisme dont on notera encore ϵ_τ l'inverse. Si M est un $\mathcal{H}(k^\tau)$-module, on peut alors définir un $\mathcal{H}(k)$-module M^{ϵ_τ} en munissant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de l'action

$$h \cdot v = \epsilon_\tau(h)v \ \text{ pour tous } h \in \mathcal{H}(k),\ v \in M.$$

On en déduit ainsi une équivalence de catégories, $M \mapsto M^{\epsilon_\tau}$, entre $\mathcal{H}(k^\tau)$-mod et $\mathcal{H}(k)$-mod (on a $\mathrm{Hom}(M^{\epsilon_\tau}, N^{\epsilon_\tau}) = \mathrm{Hom}(M,N)$).

Remarque 2.2. — Si V est un W-module on notera également V^{ϵ_τ} le W-module obtenu en munissant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de l'action $w\cdot v = \epsilon_\tau(w)v$. Le W-module V^{ϵ_τ} est alors isomorphe à $V\otimes_{\mathbb{C}W} V_\tau$, où V_τ désigne un W-module irréductible de type τ ; en particulier si V_χ est un W-module irréductible de type χ, alors $V_\chi^{\epsilon_\tau}$ est un W-module irréductible de type $\chi\otimes\tau$.

On note sgn le caractère $w \mapsto \det(w)$ de $W \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{a})$.

La construction précédente s'applique à $\tau = \mathrm{sgn}$ et (pour simplifier) on posera $\varepsilon = \epsilon_{\mathrm{sgn}}$. Le foncteur $M \mapsto M^\varepsilon$ établit donc une équivalence de catégories entre $\mathcal{H}(-k)$-mod et $\mathcal{H}(k)$-mod.

3. Modules de Verma sur $\mathcal{H}$

On note $W^\wedge$ l'ensemble des caractères irréductibles de W. Tout $\mathcal{H}$-module M étant un W-module, il se décompose en $M = \bigoplus M[\chi]$ où $M[\chi]$ est la composante isotypique de type χ de M. Soient $\chi \in W^\wedge$ et V_χ un W-module irréductible de type χ. Rappelons la définition d'un module de Verma de plus bas poids χ

introduite dans [5, (25)]. On munit V_χ d'une structure de $\mathcal{S}\otimes\mathbb{C}W$-module en posant $\mathcal{S}_+\cdot V_\chi = 0$.

Définition 3.1. — On appelle *module de Verma de plus bas poids* χ, noté $M(\chi)=M(\chi,k)$, le module induit par V_χ de $\mathcal{S}\otimes\mathbb{C}W$ à $\mathcal{H}$:

$$M(\chi)=\mathrm{ind}_{\mathcal{S}\otimes\mathbb{C}W}^{\mathcal{H}}(V_\chi)=\mathcal{H}\otimes_{\mathcal{S}\otimes\mathbb{C}W}V_\chi.$$

Il résulte de $\mathcal{H}=\mathcal{P}\otimes\mathbb{C}W\oplus\mathcal{H}\mathcal{S}_+$ que $M(\chi)$ s'identifie à $\mathcal{P}\otimes V_\chi$ comme $\mathcal{P}$-module. Les propriétés énoncées dans la proposition qui suit découlent de [5, 2.5]. Rappelons que $\mathcal{P}$ possède une structure naturelle de $\mathcal{H}$-module.

Proposition 3.2. — (a) *Si* $\chi=\mathrm{triv}$ *est le caractère trivial,* $M(\mathrm{triv})$ *s'identifie au* $\mathcal{H}$*-module* $\mathcal{P}$.

(b) *Si* $v_\chi\in V_\chi\smallsetminus\{0\}$ *et* I_χ *est l'annulateur de* v_χ *dans* $\mathbb{C}W$*, on a*

$$M(\chi)\simeq\mathcal{H}\cdot v_\chi\simeq\mathcal{H}/(\mathcal{H}\mathcal{S}_++\mathcal{H}I_\chi).$$

(c) *Tout sous-module* M *de* $M(\chi)$ *est gradué :* $M=\bigoplus_{n\geq 0}M_n$ *où* $M_n=(\mathcal{P}_n\otimes V_\chi)\cap M$ *(cf. [5, prop. 2.27]).*

(d) *Un sous-module* M *de* $M(\chi)$ *est propre si et seulement si* $M\cap V_\chi=0$.

(e) $M(\chi)$ *admet un unique sous-module maximal, et donc un unique quotient simple que l'on note* $L(\chi)=L(\chi,k)$.

(f) *Soit* V *un* $\mathcal{H}$*-module engendré par* v *tel que* $\mathbb{C}W\cdot v\simeq V_\chi$ *et* $\mathcal{S}_+\cdot v=0$. *Il existe alors un morphisme surjectif de* $\mathcal{H}$*-modules* $M(\chi)\to V$ *; si* V *est irréductible on a* $V\simeq L(\chi)$. □

Signalons le corollaire :

Corollaire 3.3. — *Soit* τ *une représentation de dimension* 1 *de* W*. Il existe un isomorphisme naturel de* $\mathcal{H}(k)$*-modules*

$$M(\chi,k)\simeq M(\chi\otimes\tau,k^\tau)^{\epsilon_\tau}.$$

Démonstration. — On applique le (b) la proposition précédente, dont on adopte les notations. Remarquons que si J est un idéal à gauche de $\mathcal{H}(k^\tau)$ et $M=\mathcal{H}(k^\tau)/J$, alors M^{ϵ_τ} est isomorphe au $\mathcal{H}(k)$-module $\mathcal{H}(k)/\epsilon_\tau(J)$. Le corollaire découle de cette remarque appliquée à

$$J=\mathcal{H}(k^\tau)\mathcal{S}_+(k^\tau)+\mathcal{H}(k^\tau)I_{\chi\otimes\tau}.$$

En effet, fixons l'annulateur $I_{\chi\otimes\tau}$ d'un élément non nul de $V_{\chi\otimes\tau}$; alors, $I_\chi=\epsilon_\tau(I_{\chi\otimes\tau})$ est l'annulateur de ce même élément dans $V_\chi=V_{\chi\otimes\tau}^{\epsilon_\tau}$. Donc

$$\epsilon_\tau(J)=\mathcal{H}(k)\mathcal{S}_+(k)+\mathcal{H}(k)I_\chi,$$

d'où le résultat voulu. □