Bull. Soc. math. France
131 (4), 2003, p. 483–506

IMAGE RÉCIPROQUE DU SQUELETTE PAR UN MORPHISME ENTRE ESPACES DE BERKOVICH DE MÊME DIMENSION

PAR ANTOINE DUCROS

RÉSUMÉ. — Cet article concerne les espaces analytiques *au sens de Berkovich.* Soit k un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique et soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel au-dessus de la boule unité k^0 de k. Si $\mathfrak{X}$ est pluristable (ce qui signifie essentiellement que les singularités de sa fibre spéciale sont « raisonnables ») alors sa fibre générique $\mathfrak{X}_\eta$ se rétracte sur l'un de ses sous-ensembles fermés noté $S(\mathfrak{X})$ (c'est le *squelette* de $\mathfrak{X}$) qui possède une structure naturelle d'espace linéaire par morceaux. Si $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un morphisme étale entre deux schémas formels pluristables alors $S(\mathfrak{Y})$ est l'image réciproque de $S(\mathfrak{X})$, et $S(\mathfrak{Y}) \to S(\mathfrak{X})$ est linéaire par morceaux. Dans ce texte nous prouvons que si $\mathfrak{X}$ est pluristable purement de dimension n et si φ est un morphisme *quelconque* d'un espace strictement k-analytique topologiquement séparé de dimension $\leq n$ vers $\mathfrak{X}_\eta$ alors $\varphi^{-1}(S(\mathfrak{X}))$ possède une unique structure linéaire par morceaux telle que φ soit linéaire par morceaux.

Texte reçu le 18 juin 2002, accepté le 10 décembre 2002

ANTOINE DUCROS, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France) • *E-mail :* antoine.ducros@univ-rennes1.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G22.

Mots clefs. — Espaces de Berkovich, structures linéaires par morceaux.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2003/483/$ 5.00

Abstract (*Pre-image of the skeleton under a map between Berkovich spaces of the same dimension*)

This article deals with *Berkovich* analytic spaces. Let k be a complete field with respect to an ultrametric absolute value and let $\mathfrak{X}$ be a formal scheme over the unit ball k^0 of k. If $\mathfrak{X}$ is pluri-stable (roughly speaking, it means that the singularities of its special fibre are "not too bad") then its generic fibre $\mathfrak{X}_\eta$ admits a retraction toward a closed subset $S(\mathfrak{X})$ (the *skeleton* of $\mathfrak{X}$) which carries a natural structure of piecewise-linear space. If $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ is an étale morphism between two pluri-stable formal schemes then $S(\mathfrak{Y})$ is exactly the pre-image of $S(\mathfrak{X})$, and $S(\mathfrak{Y}) \to S(\mathfrak{X})$ is piecewise-linear. Here we show that if $\mathfrak{X}$ is pluri-stable of pure dimension n and if φ is *any* morphism from an Hausdorff strictly k-analytic space of dimension $\leq n$ to $\mathfrak{X}_\eta$ then $\varphi^{-1}(S(\mathfrak{X}))$ carries a unique piecewise-linear structure such that φ is piecewise-linear.

Introduction

Soient k un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique $|\,.\,|$ et k^0 le sous-anneau de k formé des éléments de valeur absolue inférieure ou égale à 1. Vladimir Berkovich a développé dans [2] et [3] une théorie des espaces k-analytiques qui est reliée à la théorie rigide classique mais en diffère notamment par le fait que les espaces qu'il construit possèdent de bonnes propriétés topologiques : ainsi, chacun de leurs points a une base de voisinages compacts et connexes par arcs.

Berkovich a défini (voir [4], §1), d'une manière analogue à ce qui se fait dans le cadre rigide, un foncteur *fibre générique* qui à tout k^0-schéma formel $\mathfrak{X}$ satisfaisant des hypothèses de finitude raisonnables associe un espace k-analytique $\mathfrak{X}_\eta$. Soit $\mathfrak{X}$ un k^0-schéma formel *pluristable*, c'est-à-dire tel que le morphisme structural $\mathfrak{X} \to \operatorname{Spf} k^0$ soit localement isomorphe pour la topologie étale à une composition de flèches qui sont ou bien étales ou bien de la forme

$$\operatorname{Spf}\bigl(\mathfrak{A}\{T_1,\dots,T_n\}/(T_1\dots T_n - a)\bigr) \longrightarrow \operatorname{Spf}\mathfrak{A}.$$

Berkovich a alors démontré (voir [5], th. 8.1 et [1], §4.4) que $\mathfrak{X}_\eta$ se rétracte sur l'un de ses sous-ensembles fermés noté $S(\mathfrak{X})$ et appelé le *squelette* de $\mathfrak{X}$, sous-ensemble qui est un complexe cellulaire et possède, si de plus l'espace k-analytique $\mathfrak{X}_\eta$ est normal, une structure d'espace linéaire par morceaux (voir [1], §§4 et 5).

Le squelette se comporte de manière fonctorielle *relativement aux morphismes étales de schémas formels pluristables à fibre générique normale* ; plus précisément si $\varphi : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un tel morphisme, alors $S(\mathfrak{Y})$ est l'image réciproque de $S(\mathfrak{X})$ par la flèche $\varphi_\eta : \mathfrak{Y}_\eta \to \mathfrak{X}_\eta$ et $S(\mathfrak{Y}) \to S(\mathfrak{X})$ est linéaire par morceaux.

Le but de cet article est d'étudier l'image réciproque du squelette par un morphisme *quelconque* entre espaces de Berkovich de même dimension. On établit plus précisément le théorème suivant (théorème 3.1) :

Théorème. — *Soit k un corps valué complet. Soient n un entier et $\mathfrak{X}$ un k^0-schéma formel pluristable non dégénéré purement de dimension n. Soit Z un espace strictement k-analytique topologiquement séparé de dimension inférieure ou égale à n et φ un morphisme de Z vers $\mathfrak{X}_\eta$. Posons $\Delta = \varphi^{-1}(S(\mathfrak{X}))$. Il existe alors une unique structure linéaire par morceaux sur Δ telle que $\varphi_{|\Delta} : \Delta \to S(\mathfrak{X})$ soit linéaire par morceaux, et $\varphi_{|\Delta}$ est G-localement une immersion.*

L'une des motivations de ce travail réside dans l'espoir (encore bien lointain à ce jour) d'obtenir une généralisation en dimension supérieure d'un résultat [8] de l'auteur qui concerne les courbes algébriques p-adiques ; une telle généralisation supposerait déjà d'établir l'analogue de plusieurs propositions techniques intermédiaires de [8], comme la « variation du corps résiduel » (*cf.* [8], prop. 2.3) ou la notion de « polyèdre de variation » (*cf.* [8], prop. 1.21). Le théorème démontré ici a justement comme corollaires certains des résulats souhaités (*cf.* §3.29 et 3.30).

0. Préliminaires et notations

0.1. On appellera *corps valué* un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique *non triviale*. Si k est un tel corps on emploiera, sauf mention expresse du contraire, les notations suivantes :

- $|\,.\,|$ pour la valeur absolue de k.
- k^0 pour le sous-anneau $\{x \in k \text{ t.q. } |x| \leq 1\}$ de k et k^{00} pour l'idéal de k^0 formé des éléments de valeur absolue strictement inférieure à 1. Le quotient k^0/k^{00} sera noté $\widetilde{k}$ et appelé *corps résiduel* de k.
- $\sqrt{|k^*|}$ pour le sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ formé des éléments de torsion modulo $|k^*|$.

0.2. Soit k un corps. On appellera *k-variété algébrique* tout k-schéma séparé de type fini. Pour tout entier n, on notera $\mathbb{A}_k^n$ l'espace affine de dimension n sur k. On notera indifféremment $\mathbb{G}_{m,k}$ le groupe multiplicatif et la k-variété $\mathbb{A}_k^1 - \{0\}$ qui lui est sous-jacente.

On fixe un corps valué complet k.

0.3. Le terme d'*espace k-analytique* sera dans la suite à prendre au sens de Berkovich, et plus précisément de [3] ; les notions de base de sa théorie, qui sont pour l'essentiel définies dans le chapitre 1 de [3], seront utilisées sans rappel ni justification. Un espace k-analytique est en particulier un espace topologique au sens classique. De plus, la catégorie de ses *domaines analytiques* peut être munie d'une topologie de Grothendieck que l'on appellera la G-topologie. Si $\mathcal{X}$ est une k-variété algébrique on notera $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ son analytification. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre k-affinoïde on notera $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'espace k-analytique qui lui est associé.

Si X est un espace k-analytique et P un point de X on notera $\mathcal{H}(P)$ le corps résiduel complété de P. Notons que ce corps est invariant par immersion, ce qui justifie l'omission de X dans la notation $\mathcal{H}(P)$. Un espace k-analytique sera dit *intègre* s'il est irréductible et réduit.

0.4. On dira qu'un espace k-analytique est *algébroïde* s'il est isomorphe à un domaine analytique de l'analytification $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ d'une k-variété algébrique $\mathcal{X}$.

0.5. Si X est algébroïde et si $Y \to X$ est quasi-étale (cette notion est définie au paragraphe 3 de [4]), on déduit du lemme de Krasner et du théorème 3.4.1 de [3] que tout point de Y possède un voisinage algébroïde.

0.6. Soit $\mathcal{X}$ un k^0-schéma. On notera $\mathcal{X}_\eta$ sa fibre générique, $\mathcal{X}_s$ sa fibre spéciale et $\widehat{\mathcal{X}}$ le complété formel de $\mathcal{X}$ le long de $\mathcal{X}_s$. Si $\mathfrak{X}$ est un k^0-schéma formel, on notera $\mathfrak{X}_s$ sa fibre spéciale ; si $\mathfrak{X}$ admet un recouvrement localement fini par des ouverts de présentation finie sur $\operatorname{Spf} k^0$, on peut définir (*cf.* [4], §1) sa fibre générique $\mathfrak{X}_\eta$ qui est un k-espace analytique. On dispose alors d'une application de réduction $\pi : \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}_s$.

Si $\mathcal{X}$ est un k^0-schéma quelconque, on a $\mathcal{X}_s = \widehat{\mathcal{X}}_s$; s'il admet un recouvrement localement fini par des ouverts de présentation finie sur $\operatorname{Spec} k^0$, on dispose d'une flèche naturelle $\widehat{\mathcal{X}}_\eta \to \mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}$ *qui est un isomorphisme si $\mathcal{X}$ est propre* (*cf.* [4], §5).

0.7. Dans tout le texte les définitions, notations et conventions relatives aux espaces linéaires par morceaux sont celles introduites par Berkovich dans [1], §1. Le terme « linéaire par morceaux » sans plus de précision signifiera toujours dans la suite « $\sqrt{|k^*|}_{\mathbb{Q}}$-linéaire par morceaux ». Tout espace linéaire par morceaux est muni d'une topologie (au sens classique). On peut par ailleurs définir, sur la catégorie de ses sous-espaces linéaires par morceaux, une topologie de Grothendieck que l'on appellera simplement la G-topologie. Notons que comme $\mathbb{Q}$ est un corps et $\sqrt{|k^*|}$ un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel toute application linéaire par morceaux bijective entre espaces linéaires par morceaux est un isomorphisme (ce qui est faux pour des ensembles de coefficients plus généraux).

0.8. Soit $\mathfrak{X}$ un k^0-schéma formel pluristable non dégénéré (*cf.* [5], §1 et [1], §4.1). On notera $S(\mathfrak{X})$ son squelette ; c'est un sous-ensemble fermé de $\mathfrak{X}_\eta$ sur lequel ce dernier se rétracte (*cf.* [1], §§4 et 5), et qui peut être muni d'une structure $(|k^*| \cap [0;1])_{\mathbb{Z}_+}$-linéaire par morceaux. On peut *en particulier* le voir comme un espace linéaire par morceaux au sens donné au §0.7 ci-dessus, ce que l'on fera désormais.

0.9. Soit ℓ un entier naturel. On dira qu'un k^0-schéma formel $\mathfrak{X}$ admet une *bonne fibration de longueur ℓ* si le morphisme structural $\mathfrak{X} \to \operatorname{Spf} k^0$ peut se décomposer sous la forme

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_\ell \to \mathfrak{Z}_\ell \to \mathfrak{X}_{\ell-1} \to \mathfrak{Z}_{\ell-1} \to \mathfrak{X}_{\ell-2} \to \cdots \to \mathfrak{Z}_0 = \operatorname{Spf} k^0$$

où :
- pour tout j compris entre 0 et ℓ, les schémas formels $\mathfrak{X}_j$ et $\mathfrak{Z}_j$ sont affines ;
- pour tout j compris entre 0 et ℓ, la flèche $\mathfrak{X}_j \to \mathfrak{Z}_j$ est étale et induit un isomorphisme entre les ensembles polysimpliciaux associés, et donc entre $S(\mathfrak{X}_j)$ et $S(\mathfrak{Z}_j)$;
- pour tout j compris entre 1 et ℓ, le $\mathfrak{X}_{j-1}$-schéma formel $\mathfrak{Z}_j$ est isomorphe à $\mathfrak{X}_{j-1}(\mathbf{n}_j, \mathbf{a}_j, m_j)$ pour une famille $(\mathbf{n}_j, \mathbf{a}_j, m_j)$ convenable (pour le sens de cette notation, *cf.* [1], §4.1) telle que les fonctions sur $\mathfrak{X}_{j-1}$ qui constituent la famille $\mathbf{a}_j$ soient toutes non nulles.

Notons que si un k^0-schéma formel admet une bonne fibration, il est strictement pluristable non dégénéré ; sa fibre générique est irréductible.

0.10. Si $(r_1, \ldots, r_n)$ est une famille de n réels strictement positifs, on notera $\eta_k^{r_1,\ldots,r_n}$ le point de $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ défini par la semi-norme

$$\sum a_{i_1,\ldots,i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n} \longmapsto \max |a_{i_1,\ldots,i_n}|\, r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n}.$$

L'application $(r_1, \ldots, r_n) \mapsto \eta_k^{r_1,\ldots,r_n}$ induit un homéomorphisme entre $(\mathbb{R}_+^*)^n$ et un sous-ensemble S_k^n de $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$, qui est fermé dans l'ouvert $(\mathbb{G}_{m,k}^{\mathrm{an}})^n$ de $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$.

0.11. Remarque. — Si L/k est une extension finie de corps valués, alors S_L^n est l'image réciproque de S_k^n par la flèche naturelle $\mathbb{A}_L^{n,\mathrm{an}} \to \mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ et l'application continue $S_L^n \to S_k^n$ ainsi induite est un homéomorphisme.

0.12. Pour toute famille $(r_1, \ldots, r_n)$ de réels strictement positifs, le corps résiduel complété $\mathcal{H}(\eta_k^{r_1,\ldots,r_n})$ sera noté $k_{r_1,\ldots,r_n}$. Si la famille des r_i est libre dans $(\mathbb{R}_+^*/|k^*|) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, alors $k_{r_1,\ldots,r_n}$ est l'ensemble des séries formelles

$$\sum a_{i_1,\ldots,i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n}$$

où les i_j appartiennent à $\mathbb{Z}$ et telles que $|a_{i_1,\ldots,i_n}| r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n}$ tende vers zéro lorsque $|i_1| + \cdots + |i_n|$ tend vers l'infini. La valeur absolue d'une telle série est égale à $\max |a_{i_1,\ldots,i_n}| r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n}$.

0.13. Par analogie avec le cas des schémas on dira qu'un morphisme $Y \to X$ d'espaces k-analytiques est *radiciel* s'il est universellement injectif, c'est-à-dire s'il est injectif et si $\mathcal{H}(P)$ est une extension radicielle de $\mathcal{H}(\varphi(P))$ pour tout point P de X. Un revêtement fini radiciel et plat induit un homéomorphisme entre les espaces topologiques sous-jacents.

0.14. Soient $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde intègre et $\mathcal{B}$ une $\mathcal{A}$-algèbre intègre finie et plate, telle que la flèche $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ soit radicielle. Le corps des fractions de $\mathcal{B}$ est alors une extension finie purement inséparable de celui de $\mathcal{A}$. On en déduit l'existence d'un entier r strictement positif (qui est une puissance de la caractéristique de k) tel que pour tout élément f de $\mathcal{B}$ la fonction f^r provienne du corps des fractions de $\mathcal{A}$; par fidèle platitude on conclut que f^r provient de