Bull. Soc. math. France
131 (4), 2003, p. 507–525

PLATITUDE DU MODULE UNIVERSEL POUR GL_3 EN CARACTÉRISTIQUE NON BANALE

PAR JOËL BELLAÏCHE & ANIA OTWINOWSKA

RÉSUMÉ. — Soient F un corps p-adique, $G = \mathrm{GL}_3(F)$. Pour χ un caractère de l'algèbre de Hecke sphérique de G sur un anneau commutatif k, on introduit à la suite de Serre une représentation lisse M_χ de G sur k qui gouverne la théorie des représentations non ramifiées de G sur k. Nous prouvons que M_χ est plat sur k et que si p est inversible dans k, alors pour tout sous-groupe compact ouvert suffisament petit U de G, le module M_χ^U est libre de rang fini sur k. Ceci était conjecturé par Lazarus. Comme corollaire, nous obtenons que si k est un corps de caractéristique différente de p, M_χ a même semi-simplification que la série principale non ramifiée de caractère χ, dont la structure est décrite par les travaux de Vignéras.

ABSTRACT (*Flatness of the universal module for* GL_3). — Let F be a p-adic field, $G = \mathrm{GL}_3(F)$, and χ a character of the spherical Hecke algebra over a commutative ring k. We introduce, following Serre, a smooth representation of G over k which is central for the theory of unramified representation of G over k. We prove that M_χ is flat over k for arbitrary k, and that if p is invertible in k, that M_χ^U is free of finite rank over k for U small compact open subgroup of G. This was conjectured by Lazarus. As a corollary, we obtain that if k is a field of characteristic different of p, M_χ has the same semi-simplification that the unramified principal serie with character χ, whose structure is known thanks to Vignéras.

Texte reçu le 19 juillet 2002, accepté le 20 décembre 2002

JOËL BELLAÏCHE, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose 06108 Nice Cedex 2 (France) • *E-mail :* jbellaic@math.unice.fr
Url : http://www.math.unice.fr/~jbellaic
ANIA OTWINOWSKA, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail :* Ania.Otwinowska@math.u-psud.fr
Url : http://www.math.u-psud.fr/~ania

Classification mathématique par sujets (2000). — 20C12, 20C20.

Mots clefs. — Platitude, module universel, représentations modulaires, représentations non ramifiées, immeubles.

1. Introduction

1.1. Soient G un groupe réductif $\mathfrak{P}$-adique, K un bon sous-groupe compact maximal de G (*cf.* [4], 4.4.1), λ un caractère de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G,K)$ à valeurs dans un anneau k. Le *module universel non ramifié* associé à λ (nous dirons *module universel*) $M_{\lambda;k}$ (ou simplement M_λ, quand il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau de base k) a été introduit par Borel (dans le cas où $k=\mathbb{C}$) :

$$M_{\lambda;k} = \mathcal{C}(G/K) \otimes_{\mathcal{H}_k(G,K),\lambda} k,$$

où $\mathcal{C}(G/K)$ désigne l'espace des fonctions sur G localement constantes à support compact K-invariantes à droite, et où k est muni d'une structure de module sur $\mathcal{H}_k(G,K)$ via λ.

1.2. Depuis son introduction, le module universel a largement montré son utilité dans l'étude des représentations des groupes $\mathfrak{P}$-adiques, en particulier dans l'étude des représentations *modulaires* au sens de Brauer, *i.e.* définies sur un corps de caractéristique positive. Voir le cours de Serre au Collège de France [10], ainsi que sa lettre à Kazhdan [11], pour des applications aux formes modulaires classiques en caractéristique p. Voir [5], [1], pour des applications à l'augmentation du niveau des formes automorphes pour des groupes unitaires à trois variables.

1.3. L'objet de cet article est de démontrer la conjecture de Lazarus (voir [9], conjecture 1.0.5), et un peu plus, dans le cas où G est le groupe linéaire PGL_3 d'un corps $\mathfrak{P}$-adique. Cette conjecture affirme que pour G non ramifié(1) et de type adjoint, K hyperspécial, et k un corps de caractéristique différente de p, $\mathcal{C}(G/K,k)$ est plat sur l'anneau commutatif $\mathcal{H}_k(G,K)$.

Nous espérons pouvoir prouver par des méthodes semblables la conjecture de Lazarus pour PGL_d. Nous espérons aussi (mais ce sera sans doute plus difficile), que ces méthodes pourront mener à une preuve de la conjecture de Lazarus en général, *i.e.* pour tous les groupes réductifs de type adjoint.

1.4. Soient F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers, $\overline{F}$ son corps résiduel, π une uniformisante et $d \geq 2$ un nombre entier. On pose $G = \mathrm{PGL}_d(F)$, et on note K l'image de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_F)$ dans G. On fixe aussi un anneau quelconque k. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G,K)$ est alors commutative, isomorphe à une algèbre de polynômes $k[T_1,\dots,T_{d-1}]$, et pour tout caractère λ de cette algèbre, on introduit le module universel $M_\lambda = \mathcal{C}(G/K,k) \otimes_{\mathcal{H}_k(G,K),\lambda} k$,

(1) Les auteurs pensent qu'on peut étendre la conjecture de Lazarus en enlevant cette hypothèse, ainsi que celle sur K et toute restriction à l'anneau k. Voir en ce sens le théorème 1.5 ainsi que [1, ch. IV]. Rappelons (voir [9]) que l'hypothèse « de type adjoint » est nécessaire, ou du moins doit être remplacée par une hypothèse sur l'action du groupe de Weyl sur le tore maximal de G : l'énoncé de platitude est faux pour $G = \mathrm{SL}_3$ par exemple.

où $\mathcal{C}(G/K,k)$ désigne l'espace des fonctions à support fini sur G/K à valeurs dans k, vu comme un k-module sur lequel G agit à droite. Nous démontrons :

THÉORÈME 1.5. — *On suppose $d=3$. Le module M_λ est plat sur k. De plus, si p est inversible dans k, pour tout pro-p-sous-groupe compact ouvert U de G, le k-module M_λ^U est libre et de type fini sur k.*

La première assertion de notre théorème implique (et est en fait équivalente à) la platitude de $\mathcal{C}(G/K,k)$ sur $\mathcal{H}_k(G,K)$ pour tout anneau k. En effet, quand λ est le caractère tautologique $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_k(G,K)}(G,K)\to\mathcal{H}_k(G,K)$, le module universel $M_{\lambda;\mathcal{H}_k(G,K)}$ s'identifie comme module sur $\mathcal{H}_k(G,K)$ à $\mathcal{C}(G/K)$.

Notons que pour d quelconque et k un corps de caractéristique banale pour GL_d, la preuve de la conjecture de Lazarus fait l'objet de l'article [8]. La méthode de Lazarus utilise un résultat de Kato [7] donnant une description de $\mathcal{C}(B\backslash G/K)$ (où B est un Iwahori de G) en caractéristique banale.

1.6. Notons également qu'en utilisant l'irréductibilité générique bien connue des séries principales non ramifiées pour GL_3 en caractéristique zéro, on déduit par une méthode classique (*cf.* [10], [9] ou [1, V.6.2.5]) de ce théorème le corollaire suivant, en utilisant le principe de Brauer pour les représentations lisses, *cf.* [14].

COROLLAIRE 1.7. — *Soit k un corps de caractéristique différente de p, et qui contient une racine carrée de q. Soient χ un caractère non ramifié du Borel standard de G et λ le caractère de $\mathcal{H}(G,K)$ associé à χ via l'isomorphisme de Satake. Alors les représentations M_λ et I_χ (où I_χ désigne l'induite unitaire de χ de B à G) ont mêmes facteurs de décomposition (avec les mêmes multiplicités).*

Comme la structure des séries principales non ramifiées est connue (voir [14], ch. III), on connaît aussi la semi-simplification des modules universels.

1.8. Notre méthode donne aussi l'information suivante (qui découle immédiatement du théorème 3.2.4 point 1) :

PROPOSITION 1.9. — *Soient L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entier et λ un caractère de $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_L}(G,K)$. Alors le module $M_{\lambda;\mathcal{O}_L}$ ne contient pas de L-droites.*

Cette proposition signifie que le sous-module (c'est un sous-module d'après le théorème principal) $M_{\lambda;\mathcal{O}_L}$ de $M_{\lambda;L}$ est un réseau au sens de [3, p. 13], ce qui implique (*loc. cit.*) qu'il est libre sur $\mathcal{O}_L$. Pour $G=\mathrm{PGL}_2(F)$, $F=\mathbb{Q}_p$ mais des représentations plus générales, un résultat analogue a été récemment démontré par Breuil [3, th. 3.3.2].

2. Traduction en un problème sur l'immeuble de $\mathbf{PGL}_d(F)$

2.1. Rappels et notations sur l'immeuble de $\mathbf{PGL}_d(F)$

2.1.1. On note X l'immeuble de Bruhat-Tits attaché (voir [2, exercice 10, §2]) au système de Tits standard [2, exercice 21, §2] de $G = \mathrm{PGL}_d(F)$. Nous renvoyons à [2, exercice 15, §1] pour la définition d'un immeuble, et à cet exercice et aux suivants pour les notions de facette, chambre, cloison, appartement. On appellera *arêtes* les facettes de cardinal 2 et *sommets* les éléments de X. On dira que deux sommets sont voisins si la paire qu'ils forment est une arête.

Rappelons [12, p. 88–90] que X est en bijection canonique avec les classes d'homothéties de $\mathcal{O}_F$-réseaux dans F^d et que deux sommets distincts x et x' sont voisins si et seulement s'il existe deux réseaux Λ et Λ' représentant x et x' tels que

$$\pi\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda.$$

Le quotient $\Lambda'/\pi\Lambda$ est alors un sous-$\overline{F}$-espace vectoriel propre de $\Lambda/\pi\Lambda = \overline{F}^d$ dont la dimension est un entier compris entre 1 et $d-1$, dont la classe dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est appelée le *type* de l'arête (x, x'). Si x'' est un autre voisin de x, il est voisin de x' si et seulement si le sous-espace de $\Lambda/\pi\Lambda$ qui lui correspond contient ou est inclus dans celui qui correspond à x'. Les types des arêtes obéissent aux règles (évidentes) suivantes :

- si (x, x') est une arête de type i, alors (x', x) est une arête de type $-i$;
- si (x, x'), (x', x'') et (x, x'') sont trois arêtes, alors le type de (x, x'') est la somme de ceux de (x, x') et (x', x'').

2.1.2. Appartements. — Rappelons (voir [12, §5]) qu'à une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de F^d nous pouvons associer un *appartement* de X, défini comme l'ensemble des sommets de X représentés par des réseaux de la forme $\mathcal{O}_F\pi^{a_1}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_F\pi^{a_d}e_d$. Le choix d'une base détermine un isomorphisme entre A et $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(1, \ldots, 1)$ (voir [12, p. 94]). Un représentant dans $\mathbb{Z}^n$ d'une classe dans $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(1, \ldots, 1)$ correspondant à un point $x \in A$ s'appelle un *système de coordonnées* de x.

Nous utiliserons librement le résultat suivant : deux facettes de X sont toujours contenues dans un même appartement [2, exercice 24, §1].

2.1.3. Distance combinatoire. — La *distance combinatoire* d sur X, ou simplement distance est définie ainsi : pour (x, x') dans X, $d(x, x')$ est le plus petit entier n tel qu'il existe des points $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x'$, tels que x_i et x_{i+1} soient voisins pour tout $i = 0, \ldots, n-1$.

Si A est un appartement contenant x et x', et si $(x_1, \ldots, x_d)$ et $(x'_1, \ldots, x'_d)$ sont des systèmes de coordonnées de x et x' (pour une certaine base de F^d définissant l'appartement A), on vérifie facilement que

$$d(x, x') = \max_{i,j=1,\ldots,d} \bigl|(x_i - x'_i) - (x_j - x'_j)\bigr|.$$

2.1.4. Action de G. — L'action naturelle de $\mathrm{GL}_d(F)$ sur les $\mathcal{O}_F$-réseaux de F^d induit une action de G sur l'ensemble des sommets de X qui respecte la structure d'immeuble de X

2.1.5. Boules et sphères. — Nous supposons dorénavant fixé le sous-groupe compact maximal K de G et nous notons O l'unique sommet laissé fixe par K.

On note B_n (resp. S_n) la boule (resp. sphère) combinatoire de centre O et de rayon n, *i.e.* l'ensemble des sommets $x \in X$ vérifiant $d(O,x) \leq n$ (resp. $d(O,x) = n$).

On note K_n le fixateur dans G de la boule B_n. Si l'on choisit une base $(e_1, \dots, e_d)$ de F^d telle que $\mathcal{O}_F e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_F e_d$ est un réseau représentant O, l'image réciproque du groupe K_n dans $\mathrm{GL}_d(F)$ s'identifie au groupe des matrices congrues à une matrice scalaire inversible modulo π^n. Le groupe K_n est donc un sous-groupe compact ouvert de G, et un pro-p-groupe dès que $n \geq 1$. Les groupes K_n forment un système de voisinage de l'élément neutre dans G.

2.1.6. Notations. — Si Y est un sous-ensemble de X, on notera $\mathcal{C}(Y)$ le k-module des applications (ou « fonctions ») à support fini de Y dans k. On posera $C_n = \mathcal{C}(B_n)$.

2.2. Traduction du problème en terme d'immeubles

2.2.1. Comme G agit transitivement sur X, on dispose d'une bijection canonique $G/K \simeq X$ ($g \mapsto gO$). L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,K)$ agit naturellement à droite sur $\mathcal{C}(G/K)$, et cette action identifie $\mathcal{H}(G,K)$ à l'algèbre des endomorphismes k-linéaires sur $\mathcal{C}(G/K)$ commutant à l'action de G.

En particulier, pour $i = 1, \dots, d-1$, les opérateurs T_i définis par

$$\forall f \in \mathcal{C}(X), \forall x \in X, \quad (T_i f)(x) = \sum_{\substack{y \text{ voisin de} \\ \text{type } i \text{ de } x}} f(y)$$

commutent à l'action de G et appartiennent à $\mathcal{H}_k(G,K)$. On sait que ces éléments sont algébriquement indépendants et que $\mathcal{H}_k(G,K) = k[T_1, \dots, T_{d-1}]$.

2.2.2. Soit λ un caractère de $\mathcal{H}_k(G,K)$. Posons $\lambda_i = \lambda(T_i)$. Le k-module M_λ de l'introduction s'identifie, avec son action de G, au quotient

$$\mathcal{C}(X)/\big(\mathrm{Im}(T_1 - \lambda_1) + \cdots + \mathrm{Im}(T_{d-1} - \lambda_{d-1})\big).$$

2.3. Quelques résultats particuliers à l'immeuble de $\mathbf{PGL_3}$. — Dorénavant, on prend $d = 3$.

2.3.1. Soit X l'immeuble de PGL_3. Les arêtes orientées sont alors de deux types : 1 ou 2 mod 3. Une arête non orientée a une unique orientation pour laquelle elle est de type 1 ; sur les dessins, on représentera toujours cette orientation par une flèche.