Bull. Soc. math. France
131 (4), 2003, p. 553–585

CONDUCTEUR, DESCENTE ET PINCEMENT

PAR DANIEL FERRAND

RÉSUMÉ. — Une somme amalgamée de schémas est décrite localement par un produit fibré d'anneaux. Ce texte donne un résultat global d'existence (§ 5.4) de schémas définis comme certaines sommes amalgamées et un procédé algébrique (§ 2.2) pour décrire les modules sur produits fibrés d'anneaux correspondants.

ABSTRACT (*Conductor, Descent and Pinching*). — This paper investigates some fiber products of rings, and dually some pushouts of schemes. The algebraic side is centered on the use of the conductor to solve some descent problems, problems which can be better reached by comparing suitable categories of modules on the fiber product of rings, with the fiber product of the similar categories for each of the factors. The main algebraic result (§2.2) asserts that these categories are very close to be equivalent, and that they are indeed equivalent as long as one restricts to flat modules. The geometric side is concerned with the existence of schemes defined by pinching: starting with a scheme X', a closed subscheme Y' and a finite morphism $Y' \to Y$, the "pinching construction" is intended to produce a scheme X which is the pushout of X' along the morphism $Y' \to Y$; such a scheme is proved to exist (§5.4) under the mild asumption that any finite set of points in X' (resp. in Y) is contained in an open affine subset of X' (resp. of Y).

Table des matières

Texte reçu le 16 décembre 2002, révisé le 17 mars 2003

DANIEL FERRAND, Institut Mathématique de Rennes, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France) • *E-mail :* ferrand@univ-rennes1.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 13Axx, 13Bxx, 14A15.

Mots clefs. — Produit fibré, somme amalgamée, descente finie, pincement.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2003/553/$ 5.00

Introduction

Ce travail(1) comporte un versant algébrique et un versant géométrique.

Il commence par l'étude des produits fibrés d'anneaux qui apparaissent lorsqu'un homomorphisme injectif $f : A \to A'$ possède un conducteur non nul I (c'est l'annulateur du A-module A'/A). L'anneau A est alors isomorphe au produit fibré $A' \times_{A'/I} A/I$, et il s'agit de relier certains énoncés portant sur A à des énoncés analogues portant sur A' et sur A/I. La considération du conducteur est classiquement utilisée pour « descendre de A' à A » une propriété d'un objet déjà défini sur A (voir, parmi beaucoup d'autres, les démonstrations de [9], EGA 0_{I} 6.4.9, [9], EGA III 2.6.2 ou [8],...). Ici, on cherche plutôt à descendre l'objet lui-même, et non une de ses propriétés ; le principal résultat (2.2) relie les modules sur le produit fibré A et sur les facteurs A' et A/I ; en particulier, on montre qu'une donnée de descente relative à f, sur un A'−module M', est effective si elle le devient après réduction modulo le conducteur (3.1).

Restreint aux modules plats, cet énoncé peut être renforcé : la donnée d'un A-module plat P est *équivalente* à la donnée d'un A'-module plat P', d'un A/I-module plat Q et d'un A'/I-isomorphisme $A' \otimes_A Q \xrightarrow{\sim} P'/IP'$. Ce résultat était déjà connu de Grothendieck lorsque le conducteur I est nilpotent (*cf.* [11] p. 45, lemme 11) et son analogue pour les modules projectifs de type fini est équivalent à un théorème de Milnor (*cf.* [3] p. 479 ou [12] p. 20).

Le point de vue géométrique conduit au problème du pincement : supposons toujours que f soit injectif et posons $B = A/I$ et $B' = A'/I$, de sorte que A s'identifie à l'anneau produit fibré $A' \times_{B'} B$. On montre (5.1) que le carré de morphismes de schémas

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(B') & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(B) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Spec}(A') & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(A) \end{array}$$

(1) Novembre 2002 : une première version de ce texte a été rédigée en mai et décembre 1970, et envoyée à ceux que je pensais intéressés ; elle a fait partie d'une thèse soutenue en 1971 à Orsay, et n'a pas été autrement rendue publique. Pour la présente version, la plupart des démonstrations ont été profondément remaniées et quelques résultats ont été un peu complétés.

est cocartésien dans la catégorie des espaces annelés, autrement dit, que $\mathrm{Spec}(A)$ s'identifie à l'espace annelé somme amalgamée $\mathrm{Spec}(A') \sqcup_{\mathrm{Spec}(B')} \mathrm{Spec}(B)$.

Dans un langage plus géométrique — et imagé — on peut dire que $\mathrm{Spec}(A)$ est obtenu en « pinçant » $\mathrm{Spec}(A')$ le long du fermé $\mathrm{Spec}(B')$ par le morphisme $\mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(B)$.

Ces considérations gardent un sens pour des schémas qui ne sont plus affines mais c'est alors *l'existence* du schéma « pincé » qui pose un problème. D'ailleurs, on se heurte ici à un cas particulier de passage au quotient par une relation d'équivalence non plate et, comme on sait, dans la catégorie des schémas, l'existence de tels quotients est le plus souvent problématique.

Précisons ce qu'on entend par pincement : soient Y' un sous-schéma fermé d'un schéma X' et $g : Y' \to Y$ un morphisme *affine*. Il existe toujours un *espace annelé* $X = X' \sqcup_{Y'} Y$ s'insérant dans un carré

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & Y \arrow[d, "u"] \\ X' \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

qui est cocartésien dans la catégorie des espaces annelés. On dit qu'on peut *pincer X' le long de Y' par g si X est un schéma, si f est affine et si u est une immersion fermée.*

On donne en 5.4 et 7.1 des critères pour qu'il en soit ainsi ; si on suppose de plus que g est entier, la condition a une allure familière : pour tout $y \in Y, g^{-1}(y)$ doit être contenu dans un ouvert affine de X'.

On retrouve, en particulier, la construction bien connue (*cf.* [19]) lorsque X' est une courbe projective, Y' un nombre fini de points de X' — ou, mieux, un diviseur — et Y le corps de base.

Il faut mentionner que dans la catégorie des espaces algébriques (au sens de M. Artin), et lorsque g est fini, l'existence de l'espace pincé ne requiert aucune hypothèse supplémentaire (voir [2] p. 120, th. 6.1).

1. Produit fibré et somme amalgamée

1.1. Un carré commutatif de flèches d'une catégorie $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "w"'] & M' \arrow[d, "w'"] \\ N \arrow[r, "v"] & N' \end{tikzcd} \tag{1.1.1}$$

est dit *cartésien* si u et w font de M un produit fibré de N par M' au-dessus de N', c'est-à-dire si pour tout carré commutatif de $\mathcal{C}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} \overline{M} \arrow[r, "\bar{u}"] \arrow[d, "\overline{w}"'] & M' \arrow[d, "w'"] \\ N \arrow[r, "v"] & N' \end{tikzcd}$$

il existe une flèche et une seule $t : \overline{M} \to M$ telle que $\bar{u} = ut$ et $\overline{w} = wt$. On désignera alors souvent M par le symbole $N \times_{N'} M'$.

On définit dualement la notion de carré *cocartésien* et de somme amalgamée ; si le carré (1.1.1) est cocartésien, on désignera souvent N' par le symbole $N \sqcup_M M'$.

Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles et si (1.1.1) est cartésien, l'application $M \to N \times M'$ déduite de w et de u induit une bijection de M sur le sous-ensemble formé des couples (y, x') tels que $v(y) = w'(x')$.

Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des modules sur un anneau fixé, ou la catégorie des anneaux, le carré ci-dessus est cartésien si et seulement si le carré d'ensembles sous-jacents l'est.

On déduit immédiatement du lemme du serpent le critère suivant :

LEMME 1.2. — *Supposons que* (1.1.1) *désigne un carré commutatif dans la catégorie* $\mathrm{Mod}(A)$ *des modules sur un anneau commutatif* A*. Pour que ce carré soit cartésien dans* $\mathrm{Mod}(A)$*, il faut et il suffit que* u *induise un isomorphisme de* $\mathrm{Ker}(w)$ *sur* $\mathrm{Ker}(w')$ *et que* v *induise une application injective de* $\mathrm{Coker}(w)$ *dans* $\mathrm{Coker}(w')$.

LEMME 1.3. — *Considérons un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & A' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "g"] & B' \end{tikzcd}$$

d'homomorphismes d'anneaux dans lequel p' *est surjectif. Alors :*

a) *L'homomorphisme* p *est surjectif.*

b) *En posant* $I = \mathrm{Ker}(p)$*,* f *induit une bijection de* I *sur* $f(I) = \mathrm{Ker}(p')$ *; en particulier,* $f(I)A' = f(I)$.

c) *Les homomorphismes* g *et* p' *permettent d'identifier* B' *et* $B \otimes_A A'$.

Inversement, soient $f : A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux et I un idéal de A tel que $f(I)$ soit un idéal de A' (c'est le cas si I est le conducteur de f, c'est-à-dire l'idéal $\mathrm{Ann}_A(\mathrm{Coker}(f))$). Si $\mathrm{Ker}(f) \cap I = 0$, alors le carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ A/I \arrow[r] & A'/f(I) \end{tikzcd}$$

est cartésien.

1.3.1. Un cas particulier de ce diagramme a été popularisé sous le nom anglais de « $D+M$ *construction* » : cela désigne la somme d'un idéal maximal M d'un anneau (le plus souvent intègre) T et d'un sous-anneau $D \subset T$ tel que $D \cap M = 0$; or, le carré

$$\begin{tikzcd} D+M \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ D \arrow[r] & T/M \end{tikzcd}$$

est alors cartésien.

1.3.2. Un autre cas particulier est connu sous le nom de « *théorème chinois* » ; il s'énonce ainsi : si I et J sont des idéaux d'un anneau (commutatif) R, le carré suivant d'homomorphismes surjectifs est cartésien :

$$\begin{tikzcd} R/I \cap J \arrow[r] \arrow[d] & R/J \arrow[d] \\ R/I \arrow[r] & R/I+J. \end{tikzcd}$$

LEMME 1.4. — *Soient $f : A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux, M un A-module, M' un A'-module quotient de $A' \otimes_A M$ et $u : M \to A' \otimes_A M \twoheadrightarrow M'$ l'application composée. Si I est un idéal de A tel que $f(I)$ soit un idéal de A', alors $f(I)M' = u(IM)$. Ainsi, l'image par u du A-module IM est un A'-module.*

Tout élément de M' est somme finie d'éléments de la forme $a'u(x)$ avec $a' \in A'$ et $x \in M$ puisque M' est un quotient de $A' \otimes_A M$; comme $f(I)$ est un idéal de A', les éléments de $f(I)M'$ sont ceux qu'on peut écrire comme somme finie d'éléments de la forme $a'u(x)$ avec $a' \in f(I)$ et $x \in M$; or, si $a' = f(a)$ avec $a \in I$, on a $a'u(x) = u(ax)$.

REMARQUE 1.5. — Gardant les notations de 1.4, il ne faut pas croire que IM soit un A'-module lorsque u n'est pas injectif. Par exemple, si A est un anneau intègre et si A' est une A-algèbre finie contenue dans le corps des fractions de A et distincte de A, alors le conducteur I de $A \to A'$ est non nul et pour tout