Bull. Soc. math. France
132 (2), 2004, p. 157–199

ÉLÉMENTS RÉGULIERS ET REPRÉSENTATIONS DE GELFAND-GRAEV DES GROUPES RÉDUCTIFS NON CONNEXES

PAR KARINE SORLIN

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$ et F l'endomorphisme de Frobenius correspondant. Soit σ un automorphisme rationnel quasi-central de G. Nous construisons ci-dessous l'équivalent des représentations de Gelfand-Graev du groupe $\widetilde{G}^F = G^F \cdot \langle\sigma\rangle$, lorsque σ est unipotent et lorsqu'il est semi-simple. Nous montrons de plus que ces représentations vérifient des propriétés semblables à celles vérifiées par les représentations de Gelfand-Graev dans le cas connexe en particulier par rapport aux éléments réguliers.

Texte reçu le 17 décembre 2002, accepté le 7 mars 2003

KARINE SORLIN, LAMFA, Université de Picardie Jules Verne, 33 rue Saint-Leu, 80000 Amiens (France) • *E-mail :* `karine_sorlin@yahoo.fr` • *Url :* `http://www.mathinfo.u-picardie.fr/sorlin/`

Classification mathématique par sujets (2000). — 20C33, 20G05.

Mots clefs. — Groupes réductifs finis, groupes algébriques non connexes.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2004/157/$ 5.00
© Société Mathématique de France

ABSTRACT (*Regular Elements and Gelfand-Graev Representations for Disconnected Reductive Groups*)

Let G be a connected reductive group defined over $\mathbb{F}_q$ and let F be the corresponding Frobenius endomorphism. Let σ be a quasi-central automorphism of G, which means that σ is quasi-semi-simple (*i.e.* σ stabilises $(T \subset B)$ where T is a maximal torus included in a Borel subgroup B of G) and $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ for any quasi-semi-simple automorphism $\sigma' = \sigma \circ \mathrm{ad}(g)$, where $\mathrm{ad}(g)$ is the conjugation by g for all $g \in G$. We suppose also that σ is rational.

We define in this article Gelfand-Graev representations for the group $\widetilde{G}^F = G^F \cdot \langle\sigma\rangle$ when σ is unipotent and when it is semi-simple, which extend the σ-stable Gelfand-Graev representations for connected reductive groups.

Let T be a σ-stable rational maximal torus of G included in a σ-stable rational Borel subgroup of G. Let U be the unipotent radical of B.

In the connected reductive case, Gelfand-Graev representations of G^F are obtained by inducing an irreducible linear character of U^F which is called a regular character. We define a regular character of $U^F \cdot \langle\sigma\rangle$ as the extension of a σ-stable regular character of U^F. When σ is unipotent, σ-stable Gelfand-Graev representations of G^F are obtained by inducing σ-stable regular characters of U^F. In this case, we define Gelfand-Graev representations of $G^F \cdot \langle\sigma\rangle$ as the representations obtained by inducing regular characters of $U^F \cdot \langle\sigma\rangle$. When σ is semi-simple, the definition of Gelfand-Graev representations is more complicated.

Gelfand-Graev representations of $G^F \cdot \langle\sigma\rangle$ have similar properties to Gelfand-Graev representations of G^F. They are multiplicity free and their Harish-Chandra restrictions to a rational σ-stable Levi subgroup included in a rational σ-stable parabolic subgroup still are Gelfand-Graev representations. We say that an element of $G \cdot \sigma$ is regular if the dimension of its centralizer in G is minimal among all elements of $G \cdot \sigma$. The dual of any Gelfand-Graev representation of $G^F \cdot \sigma$ is zero outside regular unipotent elements of $G^F \cdot \sigma$ when σ is unipotent (resp. outside regular pseudo-unipotent elements of $G^F \cdot \sigma$, *i.e.* conjugates under G of regular elements of $U \cdot \sigma$, when σ is semi-simple). Moreover, Gelfand-Graev representations can be used to calculate the average value of irreducible characters of $G^F \cdot \langle\sigma\rangle$ on the set of G^F-classes of regular unipotent (resp. pseudo-unipotent) elements of $G^F \cdot \sigma$ if σ is unipotent (resp. semi-simple). When σ is semi-simple, the characteristic can be chosen good for $(G^\sigma)^0$ and we can get the exact values of irreducible characters of $G^F \cdot \langle\sigma\rangle$ on G^F-classes of regular pseudo-unipotent elements of $G^F \cdot \sigma$.

1. Introduction

Les groupes réductifs non connexes de la forme $G \cdot \langle\sigma\rangle$, où G est un groupe réductif connexe et σ un automorphisme de G, ont été étudiés par R. Steinberg [8], F. Digne & J. Michel [4] et G. Malle [6].

On suppose que G est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, que F est l'endomorphisme de Frobenius correspondant et que σ est un automorphisme quasi-central de G, ce qui signifie que σ est quasi-semi-simple (*i.e.* σ stabilise un couple $(T \subset B)$ où T est un tore maximal inclus dans un sous-groupe de

Borel B de G) et $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ pour tout automorphisme quasi-semi-simple $\sigma' = \sigma \circ \mathrm{ad}(g)$, où $\mathrm{ad}(g)$ est la conjugaison par g pour tout $g \in G$. On suppose de plus σ rationnel.

La notion d'élément quasi-central a été introduite par F. Digne & J. Michel dans [4]. Ils ont montré [4, prop. 1.34] que pour tout automorphisme rationnel σ' de G, il existe g dans G tel que $\sigma' \circ \mathrm{ad}(g)$ soit rationnel quasi-central. Quand σ' est un automorphisme quasi-semi-simple de G, alors $G^{\sigma'}$ est un groupe réductif [4, th. 1.8] et quand σ' est quasi-central, il y a de nombreuses similarités entre $G\cdot\sigma'$ et $(G^{\sigma'})^0$, en particulier pour les systèmes de racines et les groupes de Weyl [4, th. 1.15], les caractères de Deligne-Lusztig [4, section 4] et les représentations de Gelfand-Graev (section 5).

Le but de cet article est de définir des représentations de Gelfand-Graev pour $\widetilde{G}^F = G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ qui étendent les représentations de Gelfand-Graev σ-stables pour les groupes réductifs connexes.

Soit T un tore maximal rationnel σ-stable de G inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ-stable de G. Soit U le radical unipotent de B. Dans le cas connexe, les représentations de Gelfand-Graev de G^F sont obtenues en induisant certains caractères irréductibles de U^F qu'on appelle caractères réguliers. Dans le cas non connexe, on définit un caractère régulier de $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$ comme l'extension d'un caractère régulier σ-stable de U^F. Nous nous placerons dans un des deux cas extrêmes σ unipotent ou σ quasi-semi-simple. Le cas général peut s'y ramener en utilisant la décomposition de Jordan de σ.

Lorsque σ est unipotent, les représentations de Gelfand-Graev σ-stables de G^F sont obtenues en induisant un caractère régulier σ-stable de U^F (proposition 5.1). Dans ce cas, on définit les représentations de Gelfand-Graev de $G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ comme les représentations obtenues en induisant les caractères réguliers de $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$ (définition 5.2). Quand σ est semi-simple, la proposition 5.1 n'est plus vraie. La définition des représentations de Gelfand-Graev est alors plus compliquée (définition 5.3).

Les représentations de Gelfand-Graev de $G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ ont les mêmes propriétés que les représentations de Gelfand-Graev de G^F. Leurs composantes irréductibles sont de multiplicité 1 (proposition 6.1). Leur restriction de Harish-Chandra à un sous-groupe de Levi σ-stable rationnel inclus dans un sous-groupe parabolique σ-stable rationnel est encore une représentation de Gelfand-Graev (proposition 6.4). On dit qu'un élément de $G\cdot\sigma$ est régulier si la dimension de son centralisateur dans G est minimale parmi les éléments de $G\cdot\sigma$. Le dual de toute représentation de Gelfand-Graev de $G^F\cdot\sigma$ est nul en dehors des éléments unipotents réguliers de $G^F\cdot\sigma$ quand σ est unipotent (resp. en dehors des éléments pseudo-unipotents réguliers de $G^F\cdot\sigma$, *i.e.* des conjugués sous G d'éléments réguliers de $U\cdot\sigma$, quand σ est semi-simple) (proposition 7.2).

Les représentations de Gelfand-Graev peuvent être utilisées pour calculer la valeur moyenne des caractères irréductibles de $G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ sur un ensemble de classes de G^F-conjugaison d'éléments unipotents (resp. pseudo-unipotents) réguliers de $G^F\cdot\sigma$ si σ est unipotent (resp. semi-simple) (théorème 8.4). Quand σ est semi-simple et quand la caractéristique est bonne pour $(G^\sigma)^0$, on peut alors obtenir les valeurs exactes des caractères irréductibles de $G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ sur les classes de G^F-conjugaison d'éléments pseudo-unipotents réguliers de $G^F\cdot\sigma$.

2. Résultats généraux sur les groupes réductifs non connexes

Soit $\widetilde{G}$ un groupe réductif non connexe. On note G la composante neutre de $\widetilde{G}$. Nous utiliserons les définitions suivantes, introduites dans [4], qui généralisent les notions de tore et de sous-groupe de Borel :

DÉFINITION 2.1. — Un *quasi-borel* de $\widetilde{G}$ est le normalisateur dans $\widetilde{G}$ d'un sous-groupe de Borel de G. Un *quasi-tore* de $\widetilde{G}$ est le normalisateur dans $\widetilde{G}$ d'un couple $T\subset B$ formé d'un tore maximal et d'un sous-groupe de Borel de G.

On note $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p à q éléments (q étant une puissance de p). Désormais et jusqu'à la fin de l'article, on considère un groupe réductif non connexe $\widetilde{G}$ de la forme

$$\widetilde{G}=G\cdot\langle\sigma\rangle,$$

où G est un groupe réductif connexe sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$ défini sur $\mathbb{F}_q$ (on note F l'endomorphisme de Frobenius correspondant) et σ un automorphisme de G. On dit que σ est quasi-semi-simple s'il fixe un couple (T,B) formé par un tore maximal T de G inclus dans un sous-groupe de Borel B de G.

Le théorème suivant explicite les relations qui existent alors entre G et le groupe G^σ des points de G fixes par σ.

THÉORÈME 2.2 (voir [4], th. 1.8). — (i) *G^σ est un groupe réductif.*

(ii) *Soit T un tore maximal σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ-stable B de G. Soit Φ l'ensemble des racines relativement à (G,T). Si $\alpha\in\Phi$, si $\lambda\mapsto x_\alpha(\lambda)$ est le sous-groupe à un paramètre correspondant, et si i est l'ordre de la σ-orbite de α, on définit $C_{\sigma,\alpha}\in\overline{\mathbb{F}}_q^\times$ par*

$$\sigma^i\bigl(x_\alpha(\lambda)\bigr)=x_\alpha(C_{\sigma,\alpha}\lambda).$$

Alors, il existe une surjection naturelle de l'ensemble des orbites sous σ vérifiant la condition

$$(*)\qquad C_{\sigma,\alpha}=\pm1,$$

où -1 n'est autorisé que s'il existe deux racines de l'orbite dont la somme est une racine, sur l'ensemble des racines de $(G^\sigma)^0$ relativement à $(T^\sigma)^0$. Cette surjection est bijective et tous les $C_{\sigma,\alpha}$ valent 1, sauf si le diagramme de Dynkin de G possède k composantes de type A_{2n} permutées circulairement par σ, *où σ^k agit par retournement de chacune de ces composantes. Alors, pour toute racine α telle que $\alpha + \sigma^k(\alpha)$ soit une racine, les orbites de α et de $\alpha + \sigma^k(\alpha)$ ont même image et $C_{\sigma,\alpha} = C_{\sigma,\alpha+\sigma^k(\alpha)}$.*

On dit que σ est *quasi-central* s'il est quasi-semi-simple et si l'on a $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ pour tout automorphisme quasi-semi-simple σ' tel que $\sigma' = \sigma \circ \mathrm{ad}(g)$, où on note $\mathrm{ad}(g)$ la conjugaison par g pour tout $g \in G$.

Théorème 2.3 (voir [4, th. 1.15, 1.29, 1.33 et 1.36] et [5, prop. 2.1])

(i) *Si σ est quasi-semi-simple, alors σ est quasi-central si et seulement si, pour tout couple (T, B) où T est un tore maximal σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ-stable B de G, toute racine simple relativement à (T, B) vérifie la condition (*) du théorème 2.2.*

(ii) *Si σ est quasi-central, alors on a $G^\sigma = (G^\sigma)^0 \cdot \mathrm{Z}(G^\sigma)$.*

(iii) *Si σ est quasi-central unipotent, alors G^σ est connexe et si T est un tore maximal σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ-stable, T^σ est connexe et on a $T = T^\sigma \times \mathcal{L}(T)$, où $\mathcal{L} : T \to T$ est définie par $t \mapsto t^{-1}\sigma(t)$.*

(iv) *Si σ est quasi-central et rationnel, alors, il existe un couple (T, B) formé par un tore maximal rationnel σ-stable T inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ-stable B de G.*

Notation 2.4. — Lorsque pour toute racine simple α, on a l'égalité $C_{\sigma,\alpha} = 1$, on dira que σ vérifie la condition (RS).

Remarque 2.5. — Lorsque σ est unipotent quasi-central, la condition (RS) est vérifiée.

Démonstration. — Comme σ est quasi-central, on a $C_{\sigma,\alpha} = \pm 1$ pour toutes les racines $\alpha \in \Pi$ et tous les $C_{\sigma,\alpha}$ valent 1, sauf si le diagramme de Dynkin de $\widetilde{G}$ possède k composantes de type A_{2n} permutées circulairement par σ où σ^k agit par retournement de chacune de ces composantes. Mais, dans ce cas particulier, le cardinal de l'orbite de α est alors égal à $2k$; or on a supposé σ unipotent, donc l'ordre de σ est une puissance de la caractéristique de $\overline{\mathbb{F}}_q$. Mais comme l'ordre de α divise l'ordre de σ, c'est donc que la caractéristique de $\overline{\mathbb{F}}_q$ vaut 2. Ainsi, on a encore $C_{\sigma,\alpha} = 1$. □

On supposera par la suite que σ est rationnel, quasi-central, unipotent ou semi-simple. On choisit un couple $T \subset B$ où T est un tore maximal rationnel σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ-stable de G. On note U le radical unipotent de B.

Soit Φ le système de racines de (G, T). On choisit sur Φ l'ordre tel que

$$U = \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_\alpha$$