Bull. Soc. math. France
132 (3), 2004, p. 463–475

COMPLÉTUDE ET FLOTS NUL-GÉODÉSIBLES EN GÉOMÉTRIE LORENTZIENNE

PAR PIERRE MOUNOUD

RÉSUMÉ. — On étudie la complétude géodésique des flots nul-prégéodésiques sur les variétés lorentziennes compactes, ce qui donne une obstruction à être nul-géodésique. On montre que lorsque l'orthogonal du champ de vecteurs engendrant le flot considéré s'intègre en un feuilletage $\mathcal{F}$, la complétude du flot se lit sur l'holonomie de $\mathcal{F}$. On montre ainsi qu'il n'existe pas de flots nul-géodésiques lisses sur S^3. On montre aussi qu'un 2-tore lorentzien est nul-complet si et seulement si ses feuilletages de type lumière sont $\mathcal{C}^0$ linéarisables.

ABSTRACT (*Geodesic completeness of null-pregeodesic flows on compact Lorentz manifold in Lorentzian geometry*)

We study geodesic completeness of null-pregeodesic flows on compact Lorentz manifold, obtaining an obstruction to be null-geodesic. We show that when the orthogonal distribution to the vectorfield generating the considered flow integrates into a foliation $\mathcal{F}$, the completeness of the flow can be read on the holonomie of $\mathcal{F}$. We obtain this way that there are no smooth null-geodesic flows on S^3. We also prove that a Lorentzian 2-torus is null-complete if and only if its lightlike foliations are both $\mathcal{C}^0$ linearisable.

1. Introduction

Ce travail est à l'intersection de deux problèmes : le premier est l'étude des feuilletages géodésibles de dimension 1, le second est la complétude géodésique

Texte reçu le 28 mai 2003, révisé le 15 octobre 2003, accepté le 19 décembre 2003

PIERRE MOUNOUD, Université d'Avignon, Laboratoire d'analyse non linéaire et géométrie, 33 rue Louis Pasteur, 84000 Avignon (France) • *E-mail :* pierre.mounoud@univ-avignon.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 53C50, 53C12, 53C22.

Mots clefs. — Flot nul-géodésible, complétude géodésique.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2004/463/$ 5.00

des variétés lorentziennes. On supposera ces feuilletages orientés, ce qui est possible quitte à prendre un revêtement à deux feuillets ; on les appellera alors *flots* sans qu'il soit question d'une paramétrisation.

En géométrie riemannienne, un flot ϕ est dit géodésible s'il existe une métrique riemannienne g telle que les feuilles de ϕ sont des géodésiques géométriques, c'est-à-dire non paramétrées, de g (*cf.* [11]). Si on paramètre le flot par la longueur d'arc, on voit que ϕ possède alors un *paramétrage géodésique.*

La situation est plus subtile en géométrie pseudo-riemannienne.

– Un flot ϕ dont les feuilles sont des géodésiques géométriques d'une métrique h sera dit *prégéodésique.*

– On dira que ϕ est *géodésique* si de plus ϕ possède un paramétrage géodésique.

C'est bien entendu la présence de géodésiques de type lumière qui empêche de paramétrer par la longueur d'arc et qui crée cette difficulté supplémentaire.

On s'est intéréssé dans cet article aux flots nul-géodésibles(1) en géométrie lorentzienne, c'est-à-dire pour lesquels il existe une métrique de signature $(-,+,\ldots,+)$ telle que les feuilles du flot sont toutes des géodésiques de type lumière et qu'il existe un *paramétrage géodésique* du flot.

Le lien avec la complétude est fait par la remarque suivante : si le flot ϕ est (nul)-géodésique, le paramétrage des géodésiques portées par ϕ est le même que celui d'un flot défini sur toute la variété ; si celle-ci est compacte, alors ces géodésiques sont forcément complètes. La non complétude géodésique d'un flot prégéodésique est donc une obstruction à être géodésique ou inversement sa complétude géodésique en est une version faible (*cf.* §5).

Ainsi sur une surface lorentzienne les directions de type lumière sont toujours prégéodésiques mais les géodésiques de type lumière ne sont pas toujours complètes (*cf.* [1]). Par exemple, le tore de Clifton-Pohl, obtenu en quotientant $(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}, \mathrm{d}x\mathrm{d}y/(x^2+y^2))$ par l'homothétie de rapport 2, possède bien deux flots nul-prégéodésiques mais aucun flot nul-géodésique car toutes ses géodésiques de type lumière sont incomplètes.

Les flots nul-géodésibles n'ont, à notre connaissance, été étudiés que dans l'article [2], alors que la complétude a sucité de nombreux travaux. Nous ne citerons que [1] et [6] pour la similitude des points de vue. L'article de Y. Carrière et L. Rozoy [1] a fortement inspiré notre approche, c'est de là que vient l'idée (*cf.* proposition 3.1) que, pour les flots nul-prégéodésiques, la complétude géodésique est une propriété différentielle d'un feuilletage.

Les flots nul-prégéodésiques sont notamment rencontrés comme direction orthogonale des feuilletages de codimension 1 et de type lumière. Le lecteur

(1) Le terme nul-géodésible est un angliscisme, photo-géodésible serait peut-être préférable.

pourra trouver dans [12] une présentation des situations où l'on rencontre certains de ces feuilletages : ceux dont les feuilles sont totalement géodésiques. Ces seuls exemples suffiraient pour motiver l'étude des flots nul-prégéodésiques.

Les flots et les métriques étudiés dans cet article sont lisses (de classe $\mathcal{C}^2$ suffit en fait) ; le cas des flots continus, lui aussi intéressant, nécessiterait une approche différente. Précisons que l'on s'est restreint aux flots nul-prégéodésiques dont la distribution orthogonale est intégrable. Toutefois ceci n'est pas une restriction si la variété est de dimension 2 ou 3 (*cf.* lemme 2.2). Le fait central de notre travail est la mise en évidence du lien direct entre l'holonomie de ce feuilletage de codimension 1 et la complétude géodésique du flot (lemme 2.4). C'est ce qui nous permet d'obtenir notamment les résultats suivant.

COROLLAIRE 3.4. — *Un* 2*-tore lorentzien est nul-complet* (*c'est-à-dire toutes ses géodésiques de type lumière sont complètes*) *si et seulement si ses feuilletages de type lumière sont* $\mathcal{C}^0$*-conjugués à des feuilletages linéaires.*

Il s'agit d'une amélioration des résultats de Y. Carrière et L. Rozoy dans [1]. Dans le cas des variétés de dimension 3, une étude des propriétés dynamiques des flots tangents à un feuilletage de Reeb permet de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. — *Soit M une variété lorentzienne de dimension* 3 *munie d'un flot nul-prégéodésique ϕ. Si le feuilletage défini par $T\phi^{\perp}$ contient une composante de Reeb, alors ϕ n'est pas géodésiquement complet.*

On peut appliquer une double lecture à ce théorème : d'une part il fournit une assez importante famille de métriques incomplètes sur la sphère S^3, en fait sur de nombreuses variétés de dimension 3 (*cf.* [6] pour une autre famille), d'autre part il clôt la question de l'existence de flots nul-géodésibles sur la sphère (car ils doivent être géodésiquement complets).

L'auteur souhaite remercier le rapporteur pour sa lecture attentive et ses suggestions.

2. Définitions et propriétés locales.

On se placera dans toute la suite sur une variété compacte M, les métriques seront lisses et les feuilletages seront tous de classe $\mathcal{C}^2$. Commençons par préciser les termes que nous allons employer. Tout d'abord, notons que le terme flot désigne un feuilletage de dimension 1 orienté sans aucune idée de paramétrisation. Ensuite rappelons que sur une variété lorentzienne (M, h) un vecteur tangent v est dit de type lumière si $h(v, v) = 0$; par extension on parlera aussi de géodésiques de type lumière et on dira qu'une sous-variété est de type lumière si la restriction de h à son tangent est partout dégénérée. Enfin on notera D la connexion de Levi-Civita de h.

Définition 2.1. — Soit (M,h) une variété lorentzienne.

– Un flot ϕ sera dit *nul-prégéodésique* si ses feuilles sont des géodésiques non paramétrées de type lumière de h. Le flot ϕ sera dit *nul-géodésique* si, de plus, il est possible de le paramétrer globalement de façon géodésique.

– Un flot prégéodésique sera dit *géodésiquement complet* si toutes les géodésiques contenues dans ses feuilles sont complètes (c'est-à-dire définies pour tout temps).

Un flot ϕ sur M sera dit *nul-(pré)géodésible* s'il existe une métrique sur M pour laquelle il est nul-(pré)géodésique.

Avant tout donnons le critère suivant qui assure qu'un flot est nul-*pré*géodésible (on trouve un critère analogue pour le cas riemannien dans [11]).

Lemme 2.2. — *Un flot ϕ sur M est nul-prégéodésible si et seulement si il existe une distribution $\mathcal{H}$ d'hyperplans transversalement orientable tangente à ϕ et préservée par ϕ.*

Démonstration. — L'orientabilité de ϕ nous permet de considérer une trivialisation X du tangent à ϕ. Rappelons d'une part qu'une distribution $\mathcal{H}$ est préservée par ϕ si et seulement si le crochet d'un champ de vecteurs inclus dans $\mathcal{H}$ avec X est encore dans $\mathcal{H}$. D'autre part que le flot ϕ est *pré*géodésique pour une métrique h de connexion de Levi-Civita D si et seulement si $D_X X$ est colinéaire à X. Un calcul direct suffit dès lors pour montrer le lemme. □

En complément donnons le critère suivant, que l'on trouve dans l'article [2] de C. Chicone et P. Ehrlich, qui ressemble beaucoup au lemme 2.2 mais qui concerne cette fois les flots nul-géodésibles.

Proposition 2.3 (*cf.* [2]). — *Un flot ϕ sur un variété M est nul-géodésible si et seulement si il existe un champ de vecteurs X partout non nul et tangent à ϕ et une 1-forme ω partout non nulle tels que $i_X\omega = 0$ et $i_X \mathrm{d}\omega = 0$.*

Démonstration. — On vérifie par un calcul direct qu'un champ de vecteurs de type lumière X vérifie $D_X X = 0$ si et seulement si la 1-forme $\omega = h(X,.)$ vérifie les hypothèses de l'énoncé. □

Parmis les flots vérifiant les hypothèses du lemme 2.2, il y a notamment les flots tangents à un feuilletage de codimension 1. Dans la suite, on se restreindra à ce cas ; remarquons que cette condition sera toujours vérifiée si la variété est de dimension 2 ou 3. Sous cette hypothèse on a une bonne description locale de la situation. Localement, dans une carte adaptée aux feuilletages, la métrique vérifie les hypothèses du lemme suivant.

Lemme 2.4. — *Soit h une métrique lorentzienne sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{m+1}$ telle que ∂_{x_0} soit nul-prégéodésique, $\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_{m-1}}$ soient orthogonaux à ∂_{x_0}. On pose $\alpha = h(\partial_{x_0},\partial_{x_m})$. Soit t le temps où la géodésique partant du point*

$(0,\dots,0)$ *au temps* t_0 *et à la vitesse* $(\dot{x}(t_0),0,\dots,0)$ *atteint le point* $(a,0,\dots,0)$. *On a*

$$t-t_0=\frac{1}{\alpha(0,\dots,0)\dot{x}(t_0)}\int_0^a \alpha(x,0\dots,0)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. — On rappelle les équations d'Euler-Lagrange (*cf.* [4]) ; on désigne par $\dot{x}(t)$ la dérivée de $x(t)$ par rapport à t :

$$\ddot{x}_i(t)+\sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}\big(\gamma(t)\big)\,\dot{x}_k(t)\,\dot{x}_j(t)=0\quad(0\le i\le m),$$

où $\Gamma^i_{j,k}$ désigne les symboles de Christoffel de h. La direction ∂_{x_0} étant prégéodésique, l'équation se simplifie. En effet, on a $\dot{x}_i(t)=0$ pour $1\le i\le m$; après calcul de $\Gamma^1_{1,1}$, on obtient l'équation

$$\alpha\,\ddot{x}_0(t)+(\partial_{x_0}\alpha)\big(\dot{x}_0(t)\big)^2=0$$

où $\alpha=h(\partial_{x_0},\partial_{x_m})$. On remarque que l'on obtient la même équation que Carrière et Rozoy dans [1]. L'équation se ramène à $\alpha(x(t))\,\dot{x}_0(t)=1/C$, où C est une constante. On peut donc récupérer le paramètre affine t de la géodésique en écrivant $\mathrm{d}t=C\alpha\mathrm{d}x_0$ et en intégrant. On obtient l'égalité désirée : en effet C est donnée par la vitesse initiale de la géodésique, on a $C^{-1}=\alpha(0,\dots,0)\,\dot{x}_0(t_0)$. □

3. Complétude et pseudo-groupe d'holonomie

On se restreint dorénavant au cas particulier où la distribution orthogonale du flot nul-prégéodésique est intégrable. On montre alors :

PROPOSITION 3.1. — *Soient* $\mathcal{F}$ *un feuilletage transversalement orientable de codimension* 1 *et* ϕ *un flot inclus dans* $\mathcal{F}$. *Soit* h *une métrique lorentzienne telle que* ϕ *est de type lumière et que* $(T\phi)^\perp=T\mathcal{F}$. *Alors le flot* ϕ *est nul-prégéodésique et la complétude géodésique de* ϕ *ne dépend pas du choix de* h.

Cette proposition montre que, dans ce cas du moins, la complétude géodésique d'un flot nul-prégéodésique est une propriété des feuilletages.

Démonstration. — On considère à nouveau une trivialisation X de $T\phi$. On se donne maintenant un atlas fini $\{U^i,1\le i\le p\}$ chaque ouvert étant sur le modèle du lemme 2.4 : chaque U^i est muni des coordonnées (x^i) telles que $\partial_{x^i_0}=X$ et $\partial_{x^i_\ell}$ est orthogonal à X si $1\le\ell\le m-1$. On désigne par $\Psi^{ij}=(\Psi^{ij}_0,\dots,\Psi^{ij}_m)$ le changement de cartes de U^i vers U^j (si l'intersection est non vide) envoyant les coordonnées (x^i) sur les coordonnées (x^j). Sur chaque U^i, on pose $\alpha^i=h(\partial_{x^i_0},\partial_{x^i_m})$. On a $\alpha^j=\big(\partial_{x^i_m}\Psi^{ij}_m\big)\,\alpha^i$.

On découpe maintenant la géodésique γ en les points a_n de telle sorte qu'entre a_n et a_{n+1} la courbe reste dans l'ouvert U^{i_n}, $i_n\in\{1,\dots,p\}$ (ainsi