Bull. Soc. math. France
132 (4), 2004, p. 543–567

SUR LES ORBITES D'UN SOUS-GROUPE SPHÉRIQUE DANS LA VARIÉTÉ DES DRAPEAUX

PAR NICOLAS RESSAYRE

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe algébrique complexe réductif et connexe, B un sous-groupe de Borel de G et H un sous-groupe sphérique de G.
Soit X un plongement $G \times G$-équivariant de G. Nous savons que $B \times H$ n'a qu'un nombre fini d'orbites dans G ; nous montrons qu'il n'en a qu'un nombre fini dans X. Soit $\overline{V}$ l'adhérence dans X d'une orbite de $B \times H$ dans G et $\overline{\mathcal{O}}$ l'adhérence d'une orbite de $G \times G$ dans X. Si X est toroïdal, nous montrons que l'intersection $\overline{V} \cap \overline{\mathcal{O}}$ est propre dans X et la décrivons ensemblistement. Si de plus X est lisse, nous calculons les multiplicités d'intersections qui sont des puissances de 2. Enfin, si X est toroïdal, lisse et complet, nous exprimons la classe de cohomologie de $\overline{V}$ comme une combination linéaire des classes d'adhérence dans X d'orbites de $B \times B$ dans G. Nous utilisons la cohomologie B-équivariante pour obtenir ce dernier résultat.
Soit Y un plongement lisse G-équivariant et toroïdal de G/H et $\overline{\mathcal{O}}$ l'adhérence d'une orbite de G dans Y. Soit $\overline{V}$ l'adhérence dans Y d'une orbite de B dans G/H. Dans [4], après la proposition 6, M. Brion demande si chaque composante irréductible de $\overline{V} \cap \overline{\mathcal{O}}$ contient des points lisses de $\overline{V}$: nous répondons négativement à cette question dans la dernière partie.

Texte reçu le 2 décembre 2002, révisé le 3 novembre 2003, accepté le 16 juin 2003

NICOLAS RESSAYRE, Université Montpellier II, Département de Mathématiques, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5 (France)
E-mail : `ressayre@math.univ-montp2.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14M15, 14M17, 14C17, 55N91.

Mots clefs. — Plongement de groupes, variétés sphériques, adhérences d'orbites, variété des drapeaux, cohomologie équivariante .

Abstract (*On the orbits of a spherical subgroup in the flag manifold*)
Let G be a complex reductive algebraic group, B be a Borel subgroup of G and H be a spherical subgroup of G.
Let X be a $G\times G$-equivariant embedding of G. We know that $B\times H$ have finitely many orbits in G ; we show that it has finitely many ones in X. Let $\overline{V}$ be the closure in X of a $(B\times H)$-orbit in G, and $\overline{\mathcal{O}}$ be the closure of a $(G\times G)$-orbit in X. If X is toroïdal, we show that the intersection $\overline{V}\cap\overline{\mathcal{O}}$ is proper in X and we describe this intersection. If in addition X is smooth, we determine the intersection multiplicities of $\overline{V}\cap\overline{\mathcal{O}}$, which are powers of 2. If X is toroïdal, smooth and complete, we write the class of cohomology of $\overline{V}$ as a linear combinaison of the classes of the closures in X of the $(B\times B)$-orbits in G. The proof of this last statement uses B-equivariant cohomology.
Let Y be a smooth G-equivariant embedding of G/H and $\overline{\mathcal{O}}$ be the closure of a G-orbit in Y. Let $\overline{V}$ be the closure in Y of a B-orbit in G/H. In [4], just after Proposition 6, M. Brion asks if each irreducible component of $\overline{V}\cap\overline{\mathcal{O}}$ intersects the set of the smooth points in $\overline{V}$: we give an example which answers 'no' to this question.

1. Introduction

Soient G un groupe algébrique complexe réductif et connexe, et B un sous-groupe de Borel de G. Soit H un sous-groupe fermé de G. On suppose que H est sphérique c'est-à-dire (voir [1]) que l'ensemble $\mathbf{H}(G/B)$ des orbites de H dans G/B est fini. Ces orbites et leurs adhérences jouent un rôle important en théorie des représentations (voir par exemple [20]). Par ailleurs, les classes des adhérences d'orbites de B dans les G-variétés sphériques (c'est-à-dire les variétés normales, munies d'une action de G et ne contenant qu'un nombre fini d'orbites de B) sont des générateurs naturels de la cohomologie de ces variétés, supposées lisses et complètes. Il est donc intéressant de comprendre l'ensemble $\mathbf{B}(G/H)$ des orbites de B dans G/H. Ce dernier est en bijection naturelle avec $\mathbf{H}(G/B)$.

Fixons un tore maximal T de G inclus dans B. Si V est une orbite de B dans G/H, on note $\overline{V}$ son adhérence dans G/H. On construit dans [14], [9] et [4] un graphe orienté $\Gamma(G/H)$ dont les sommets sont les éléments de $\mathbf{B}(G/H)$ et dont les arêtes, qui peuvent être simples ou doubles, sont étiquetées par les racines simples de G. Soit α une racine simple et P_α le sous-groupe parabolique minimal de G et contenant B associé à α. Soit V et V' deux orbites de B dans G/H. Une arête étiquetée par α monte de V à V' si et seulement si $\overline{V}\neq P_\alpha\cdot\overline{V}=\overline{V}'$. Alors, l'application naturelle $P_\alpha\times_B\overline{V}\to\overline{V}'$ est génériquement finie de degré 1 ou 2 ; ceci détermine si l'arête est simple ou double.

Des travaux de M. Brion mais aussi de S. Pin ont montré que ce graphe $\Gamma(G/H)$ apporte des informations sur la lissité, la normalité, la classe de cohomologie des adhérences d'orbites de H dans G/B (voir [3], [4] et [11]). Comprendre les interactions entre les propriétés combinatoires, géométriques et topologiques de l'ensemble $\mathbf{H}(G/B)$ est un sujet vaste auquel cet article apporte une modeste contribution.

On considère l'action de $G \times G$ sur G par multiplication à gauche et à droite. L'ensemble $\mathbf{B}(G/H)$ est en bijection naturelle avec l'ensemble $\mathbf{BH}(G)$ des orbites de $B \times H$ dans G. On utilisera implicitement dans cette introduction les bijections naturelles entre les trois ensembles $\mathbf{H}(G/B)$, $\mathbf{B}(G/H)$ et $\mathbf{BH}(G)$. On s'intéresse aux éléments de $\mathbf{BH}(G)$ et surtout à leurs adhérences dans les plongements $G \times G$-équivariant de G. Soit X un tel plongement. Notre premier résultat (voir le corollaire 4.7) est le

Théorème A. — *L'ensemble des orbites de $B \times H$ dans X est fini.*

Lorsque $H = B$, ce résultat était déjà connu puisque plus généralement, toute variété sphérique ne contient qu'un nombre fini d'orbite d'un sous-groupe de Borel. Simultanément à la rédaction du présent article, T.A. Springer [18] a paramétré les orbites de $B \times B$ dans le plongement canonique de G (supposé semi-simple adjoint). Ici, dans le cas où X est toroïdal (voir le paragraphe 4.1.1 pour une définition précise), nous paramétrons (voir la proposition 4.6) les orbites de $B \times H$ dans X.

Soit V_G dans $\mathbf{BH}(G)$. Notons $\overline{V}_G^X$ l'adhérence de V_G dans X. Nous obtenons des résultats sur les sous-variétés $\overline{V}_G^X$ dès que X est toroïdal. Cependant, par soucis de simplicité, nous supposons dans l'introduction, que G est semi-simple adjoint et que X est le plongement canonique de G (voir [5]). Notons Z l'unique orbite fermée de $G \times G$ dans X. Celle-ci est isomorphe à $G/B \times G/B$, ou encore à $G/B^- \times G/B$ où B^- est le sous-groupe de Borel de G contenant T et opposé à B.

Nous avons encore besoin de notations pour énoncer nos résultats. Soit W le groupe de Weyl de T et U le radical unipotent de B. Pour tout w dans W, on pose $U_w = U \cap wUw^{-1}$ et $B_w = B \cap wBw^{-1}$.

Considérons un chemin γ de $\Gamma(G/H)$ qui monte à partir du sommet correspondant à V_G. Soit $V'_{G/B}$ l'orbite de H dans G/B associée au sommet le plus haut de γ. On note $D(\gamma)$ le nombre d'arêtes doubles le long de γ et $w(\gamma)$ le produit dans W des réflexions simples associées aux étiquettes de γ. Le théorème 4.9 décrit un ouvert de $\overline{V}_G^X$ associé à $w(\gamma)$. Dans le contexte de l'introduction, on obtient le

Théorème B. — *On reprend les notations ci-dessus. Alors, il existe un ouvert $\Omega_{V,w(\gamma)}$ de $\overline{V}_G^X$ stable par $B_{w(\gamma)} \times H$ et une fibration localement triviale $B_{w(\gamma)}$-invariante et H-équivariante $\psi : \Omega_{V,w(\gamma)} \to V'_{G/B}$.*

De plus, il existe une sous-variété $S_{V,w(\gamma)}$ de $\Omega_{V,w(\gamma)}$ stable par T, telle que l'action de $U_{w(\gamma)}$ induise un isomorphisme de $U_{w(\gamma)} \times S_{V,w(\gamma)}$ sur la fibre de ψ.

Enfin, la variété $S_{V,w(\gamma)}$ a $2^{D(\gamma)}$ composantes irréductibles ; chacune est isomorphe à l'espace affine de dimension rang de G et intersecte Z suivant l'unique point fixe de $B^- \times B$ dans Z.

Le théorème 4.10 décrit l'intersection de $\overline{V}_G^X$ et de l'adhérence d'une orbite de $G\times G$ dans X. Dans le cadre de l'introduction, ce dernier implique le

THÉORÈME C. — *Rappelons que Z est canoniquement isomorphe à $G/B^-\times G/B$. On a :*

1) *Les sous-variétés $\overline{V}_G^X$ et Z s'intersectent proprement dans X.*

2) *Les composantes irréductibles de $\overline{V}_G^X\cap Z$ sont les adhérences dans $G/B^-\times G/B$ des orbites de $B\times H$*

$$BwB^-/B^-\times V'_{G/B},$$

telles que w s'écrit $w(\gamma)$ pour un chemin γ dans $\Gamma(G/H)$ qui monte de V_G à une orbite $V'_{G/B}$ de H dans G/B.

3) *La multiplicité de l'intersection $\overline{V}_G^X\cap Z$ le long de $\overline{Bw(\gamma)B^-}/B^-\times\overline{V}'_{G/B}$ est $2^{D(\gamma)}$.*

Sous certaines hypothèses, le théorème 4.13 donne une expression pour la classe $[\overline{V}_G^X]$ de cohomologie $B\times\{1\}$-équivariante (ou $T\times\{1\}$-équivariante) de $\overline{V}_G^X$ à coefficients rationnels. Ici, ceci nous donne le

THÉORÈME D. — *Dans $H^*_{B\times\{1\}}(X)$, on a :*

$$[\overline{V}_G^X]=\sum_{w=w(\gamma)}2^{D(\gamma)}\big[\overline{Bw^{-1}B^{-X}}\big],$$

où la somme porte sur tous les chemins γ issus de V_G.

Remarquons que la formule du théorème D est valable dans la cohomologie ordinaire $H^*(X)$ de X. En revanche, la démonstration faite en 4.5 utilise fortement la cohomologie équivariante.

Considérons un plongement lisse G-équivariant et toroïdal Y de G/H et $\mathcal{O}$ une orbite de G dans Y. Soit V une orbite de B dans G/H. M. Brion demande dans [4], après la proposition 6, si chaque composante irréductible de $\overline{V}^Y\cap\overline{\mathcal{O}}^Y$ contient des points lisses de $\overline{V}^Y$. Nous répondons à cette question par la négative dans la dernière partie.

En effet, nous considérons l'unique orbite fermée V d'un sous-groupe de Borel B dans l'espace homogène PSL(4)/PSO(4). Soit Y le plongement canonique de PSL(4)/PSO(4) et Z l'unique orbite fermée de PSL(4) dans Y. Le dernier résultat (théorème 5.1 dans le corps du texte) est le

THÉORÈME E. — *Avec les notations ci-dessus, l'intersection $Z\cap\overline{V}^Y$ a une composante irréductible constituée de points singuliers de $\overline{V}^Y$.*

La majeure partie de cet article (les théorèmes A, B, C et D) étudie les adhérences d'orbites de $B\times H$ dans les plongements de G. Ce travail s'inspire de celui de M. Brion [4] sur les adhérences d'orbites de B dans les plongements de G/H. Par exemple, le théorème B (ou le théorème 4.9 ci-dessous) est l'analogue de la proposition 6 de [4]. On peut remarquer que la description de la variété $S_{V,w(\gamma)}$ du théorème B est plus précise que celle de la variété $S_{Y,w}$ de M. Brion. Il est par exemple facile de déterminer le lieu non lisse (ou non normal) de $S_{V,w(\gamma)}$. Le théorème C (ou 4.10) est l'analogue du théorème 1 de [4]. Avec les notations du théorème C, une différence notable est qu'ici tous les chemins dans $\Gamma(G/H)$ issus de V_G interviennent dans la description de $\overline{V}_G^X \cap Z$; alors que, dans la situation étudiée par M. Brion seuls ceux arrivant à l'orbite ouverte comptent.

J'ai montré dans [13] que certains plongements Y de G/H s'obtiennent comme quotient géométriques par H d'ouverts de plongements X de G. Ainsi, sous certaines hypothèses, les adhérences d'orbites de B dans Y sont des quotients géométriques d'ouverts d'adhérences d'orbites de $B \times H$ dans X. Ceci est un lien explicite entre le travail de M. Brion [4] et cet article. Il est donc permis de penser que ce travail peut aider à mieux comprendre les adhérences d'orbites de B dans des plongements de G/H. Ce point de vue m'a conduit à examiner l'exemple de la section 5.

Remerciements. — Je tiens à remercier M. Brion pour ses encouragements et sa lecture attentive de versions préliminaires à cet article. Je voudrais également remercier S. Pin pour nos nombreuses et utiles discussions.

2. Le graphe associé aux orbites de H dans $\mathcal{B}$

2.1. — Soient G un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{B}$ la variété des drapeaux de G. Soit H un sous-groupe algébrique de G qui a une orbite dense dans $\mathcal{B}$; on dit alors que H est *sphérique*. Nous nous intéressons à l'ensemble $\mathbf{H}(\mathcal{B})$ des orbites de H dans $\mathcal{B}$. En fait, cet ensemble est fini (voir [1], [19] ou [9]).

Rappelons brièvement comment on construit un graphe dont les sommets sont les éléments de $\mathbf{H}(\mathcal{B})$. Le point de vue choisi ici est différent de celui de l'introduction ou de [4]. Il est cependant facile de voir que ces constructions sont équivalentes.

Considérons l'ensemble Δ des classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques non résolubles minimaux de G. Si α appartient à Δ, on note $\mathcal{P}_\alpha$ le G-espace homogène d'isotropie α. Alors, il existe une unique application

$$\phi_\alpha : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{P}_\alpha$$

qui est G-équivariante. Remarquons que les fibres de ϕ_α sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$.

Soit V_α une orbite de H dans $\mathcal{P}_\alpha$ et v un point de V_α. Chaque orbite de H dans $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ intersecte $\phi_\alpha^{-1}(v)$ suivant une orbite du stabilisateur H_v de v dans H. Considérons le morphisme

$$\theta : H_v \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\phi_\alpha^{-1}(v)\big) \simeq \mathrm{PSL}(2)$$