Bull. Soc. math. France
133 (1), 2005, p. 145–157

PERTE DE RÉGULARITÉ POUR LES ÉQUATIONS D'ONDES SUR-CRITIQUES

PAR GILLES LEBEAU

RÉSUMÉ. — On prouve que le problème de Cauchy local pour l'équation d'onde sur-critique dans $\mathbb{R}^d$, $\Box u + u^p = 0$, p impair, avec $d \geq 3$ et $p > (d+2)/(d-2)$, est mal posé dans H^σ pour tout $\sigma \in]1, \sigma_{\mathrm{crit}}[$, où $\sigma_{\mathrm{crit}} = d/2 - 2/(p-1)$ est l'exposant critique.

ABSTRACT (*Loss of regularity for super critical wave equations*). — We prove that the local Cauchy problem for the supercritical wave equation in $\mathbb{R}^d$, $\Box u + u^p = 0$, with $d \geq 3$, $p > 3$ and $p > (d+2)/(d-2)$, is ill-posed in H^σ for every $\sigma \in]1, \sigma_c[$, where $\sigma_c = d/2 - 2/(p-1)$ is the critical exponent.

1. Introduction et résultats

On s'intéresse au problème de Cauchy local pour l'équation des ondes non linéaire dans $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 3$ et p entier impair,

$$(\partial_t^2 - \triangle_x)u + u^p = 0, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x)) = u_1(x). \tag{1.2}$$

Texte reçu le 4 avril 2003, révisé le 16 juin 2003, accepté le 28 août 2003.

GILLES LEBEAU, Université de Nice Sophia-Antipolis, Laboratoire J.-A. Dieudonné, UMR 6621 du CNRS, Parc Valrose 06108 Nice Cedex 2 (France)
E-mail : `lebeau@math.unice.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 35L05, 35L15.

Mots clefs. — Analyse microlocale, équations d'ondes non-linéaires.

Les solutions de l'équation (1.1) vérifient formellement la conservation de l'énergie

$$E(u) = \int \frac{1}{2}\big(|\partial_t u|^2 + |\nabla_x u|^2\big) + \frac{u^{p+1}}{p+1}\,\mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

Le problème de Cauchy le plus naturel pour (1.1) est donc de supposer les données à l'instant $t = 0$ dans l'espace d'énergie

$$u(0,x) \in \dot{H}^1 \cap L^{p+1}, \quad \partial_t u(0,x) \in L^2. \tag{1.4}$$

Rappelons que le problème de Cauchy (1.1) avec données dans l'espace d'énergie possède une longue histoire.

Lorsque l'exposant p est sous-critique, c'est-à-dire vérifie $p+1 < d^*$, où $d^* = 2d/(d-2)$ est l'exposant de l'injection de Sobolev $\dot{H}^1 \subset L^{d^*}$ dans $\mathbb{R}^d$, les premiers résultats furent obtenus en dimension 3 par Jörgens [4] en 1961, le cas de la dimension quelconque ayant été résolu par Ginibre et Velo [2] en 1985, où ils prouvent que les inégalités de Strichartz impliquent que le problème de Cauchy pour (1.1) avec données dans l'espace d'énergie est bien posé globalement en temps.

Dans le cas critique $p+1 = d^*$, le problème de l'existence globale a été résolu par Shatah et Struwe [8] (avec l'unicité dans un espace précisé adapté aux estimations de Strichartz).

Nous supposerons donc que l'exposant p est au contraire sur-critique, c'est-à-dire vérifie

$$p + 1 > d^*. \tag{1.5}$$

Dans ce cas, l'existence de solutions faibles globales en temps a été obtenu par Segal [7], Lions [6], et Strauss [9].

L'éventuelle unicité de ces solutions faibles et leur continuité par rapport aux données de Cauchy demeurent des problèmes ouverts.

Nous avons toutefois prouvé dans [5] qu'il est impossible de construire les solutions faibles de sorte qu'elles dépendent continuement de leurs données de Cauchy, uniformément sur la boule unité de l'espace d'energie (ce qui est le cas lorsque p est sous-critique).

Remarque 1.1. — Dans toute la suite, on appelera *solution faible* de l'équation (1.1) une solution au sens des distributions construites par approximation de l'équation, méthode que nous rappelons en appendice. En particulier, il résulte des constructions rappelées au §6, que si les données de Cauchy coïncident dans un ouvert Ω avec des fonctions ne dépendant au plus que de deux variables, par vitesse finie de propagation, les solutions faibles coïncident dans le domaine d'influence de Ω avec l'unique solution du problème 2D associé, donc indépendamment du choix de la fonction de régularisation f_ε, et de la suite extraite choisie dans le procédé de construction des solutions faibles.

Les inégalités de Strichartz entraînent toutefois que le problème de Cauchy local (1.1), avec données dans l'espace

$$u(0,x) \in H^\sigma,\ \partial_t u\big(0,x)\big) \in H^{\sigma-1} \tag{1.6}$$

est localement bien posé pour σ vérifiant

$$\sigma > \sigma_{\text{crit}}, \quad \sigma_{\text{crit}} = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}\cdot \tag{1.7}$$

L'objet de cet article est de prouver que le problème de Cauchy local (1.1) est mal posé dans H^σ pour tout σ vérifiant $\sigma \in \,]1, \sigma_{\text{crit}}[$; pour énoncer le résultat, nous introduisons les notations suivantes.

Soit σ_{sob} l'exposant de l'injection de Sobolev $H^{\sigma_{\text{sob}}} \subset L^{p+1}$:

$$\sigma_{\text{sob}} = \frac{d}{2} - \frac{d}{p+1} \tag{1.8}$$

Comme p est sur-critique, on a $1 < \sigma_{\text{sob}} < \sigma_{\text{crit}}$. Soit $I(\sigma)$ la fonction définie sur $[1, \sigma_{\text{crit}}]$ par

$$I(\sigma) = 1 \text{ sur } [1, \sigma_{\text{sob}}], \quad I(\sigma) = \frac{2\sigma}{(p-1)(\frac{1}{2}d - \sigma)} \text{ sur } [\sigma_{\text{sob}}, \sigma_{\text{crit}}]. \tag{1.9}$$

On a $I(\sigma) < \sigma$ pour tout $\sigma \in \,]1, \sigma_{\text{crit}}[$.

Le résultat qui suit exprime la perte de régularité des solutions faibles par rapport à la régularité de leurs données de Cauchy.

Théorème 1. — *Pour tout $\sigma \in \,]1, \sigma_{\text{crit}}[$ et tout $\sigma' > I(\sigma)$, il existe un couple de données de Cauchy $u_0 \in H_0^\sigma \cap L^{p+1}$, $u_1 \in C_0^\infty$, et une suite t_k de limite nulle, telles que pour toute solution faible $u(t,x)$ de* (1.1), (1.2), *on ait*

$$\lim_{k\to\infty} \big\| u(t_k, .)\big\|_{H^{\sigma'}} = +\infty. \tag{1.10}$$

Remarque 1.2. — Il résultera de la construction qu'on peut choisir $u_0 \in C_0^\infty$ en dehors de l'origine.

Soit $J(\sigma)$ la fonction définie sur $[1, \sigma_{\text{crit}}]$ par

$$J(\sigma) = \frac{\frac{1}{2}d + 2(\sigma-1)/(p-1)}{\frac{1}{2}d - (\sigma-1)}\cdot \tag{1.11}$$

Théorème 2. — *Pour tout $\sigma \in \,]1, \sigma_{\text{crit}}[$ et tout $\sigma' > J(\sigma)$, il existe un couple de données de Cauchy $u_0 \in C_0^\infty$, $u_1 \in H_0^{\sigma-1}$ et une suite t_k de limite nulle, telles que pour toute solution faible $u(t,x)$ de* (1.1), (1.2), *on ait*

$$\lim_{k\to\infty} \big\| \partial_t u(t_k, .)\big\|_{H^{\sigma'-1}} = +\infty. \tag{1.12}$$

Remarque 1.3. — On peut interpréter le théorème 2 comme une explosion instantannée des solutions faibles dans tout espace d'interpolation entre l'espace d'énergie et l'espace optimal des inégalités de Strichartz associé à l'homogénéité de l'équation.

2. Homogénéité

Soient $d' > 0$ et $d'' > 0$ tels que $d' + d'' = d$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $x = (x', x'')$ avec $x' \in \mathbb{R}^{d'}$ et $x'' \in \mathbb{R}^{d''}$. Soient $\alpha > 0$ et $\gamma \in \,]0,1]$. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $h \in \,]0,1]$, on pose

$$\varphi_h(x', x'') = h^{-\alpha}\varphi\Big(\frac{x'}{h}, \frac{x''}{h^\gamma}\Big). \tag{2.1}$$

En désignant par $\widehat{\varphi}$ la transformation de Fourier et

$$\delta = \frac{1}{2}(d' + d''\gamma) \tag{2.2}$$

on a

$$\widehat{\varphi}_h(\xi', \xi'') = h^{2\delta-\alpha}\widehat{\varphi}(h\xi', h^\gamma\xi'') \tag{2.3}$$

d'où pour tout σ

$$\begin{aligned}\int (1 + |\xi|^2)^\sigma \big|\widehat{\varphi}_h(\xi)\big|^2 \mathrm{d}\xi \\ = h^{2(\delta-\alpha-\sigma)} \int \big(h^2 + |\xi'|^2 + h^{2(1-\gamma)}|\xi''|^2\big)^\sigma \big|\widehat{\varphi}(\xi)\big|^2 \mathrm{d}\xi.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Il en résulte

$$\|\varphi_h; H^\sigma\| = h^{\delta-\alpha-\sigma}\Big(\int (h^2 + |\xi'|^2 + h^{2(1-\gamma)}|\xi''|^2)^\sigma |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\Big)^{1/2}. \tag{2.5}$$

La norme L^{p+1} de φ_h est quant à elle donnée par

$$\|\varphi_h; L^{p+1}\| = h^{2\delta/(p+1)-\alpha}\|\varphi; L^{p+1}\|. \tag{2.6}$$

Si on effectue le changement d'échelle

$$x' = hy', \quad x'' = h^\gamma y'', \quad u(t, x', x'') = h^{-\alpha}v(t, y', y''), \tag{2.7}$$

u sera solution de (1.1) si, et seulement si, v est solution de l'équation

$$h^{(p-1)\alpha}\partial_t^2 v - h^{2\beta}(\triangle_{y'} + h^{2(1-\gamma)}\triangle_{y''})v + v^p = 0 \tag{2.8}$$

avec

$$\beta = \frac{(p-1)\alpha}{2} - 1. \tag{2.9}$$

La stratégie de construction de solutions singulières u pour (1.1) va consister à construire d'abord des solutions v de (2.8) et à définir ensuite u comme une superposition de solutions définies par (2.7). Comme on veut contrôler les normes H^σ et L^{p+1} de la donnée $u(0, x)$, et qu'il semble judicieux de faire en sorte que (2.8) ne dégénère pas sur une équation des ondes linéaires lorsque h tend vers 0, on impose les relations déduites de (2.5), (2.6) et (2.8)

$$\alpha = \min\Big(\delta - \sigma, \frac{2\delta}{p+1}\Big), \quad \beta > 0. \tag{2.10}$$

LEMME 2.1. — *Pour tout $\sigma \in [1, \sigma_{\mathrm{crit}}[$, les solutions $\delta \leq \frac{1}{2}d$ aux inéquations* (2.10) *sont les réels*

$$\delta \in \Big]\sigma + \frac{2}{p-1}, \frac{d}{2}\Big]. \tag{2.11}$$

Démonstration. — Les inéquations (2.10) signifient

$$\min\Big(\delta - \sigma, \frac{2\delta}{p+1}\Big) > \frac{2}{p-1},$$

c'est-à-dire $\delta > \sigma + 2/(p-1)$ pour $\delta \leq \sigma(p+1)/(p-1)$ et $\delta > (p+1)/(p-1)$ pour $\delta \geq \sigma(p+1)/(p-1)$, d'où le résultat. □

REMARQUE 2.1. — La quantité 2δ joue le rôle d'une dimension virtuelle pour le changement d'échelle (2.7), de sorte que la borne inférieure dans (2.11) est exactement la valeur critique (1.7) associée à la dimension 2δ.

3. Équation en dimension 1

On s'intéresse dans cette partie à l'équation en dimension 1, avec $s, z \in \mathbb{R}$,

$$\partial_s^2 v - \partial_z^2 v + v^p = 0, \quad v(0,z) = v_0, \quad \partial_s v(0,z) = v_1. \tag{3.1}$$

On notera $G(s)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$G'' + G^p = 0, \quad G(0) = 1,\ G'(0) = 0. \tag{3.2}$$

Soit L le linéarisé de (3.1) sur la solution $G(s)$ indépendante de z,

$$L(w) = \partial_s^2 w - \partial_z^2 w + pG^{p-1} w. \tag{3.3}$$

Soient Γ la période de la fonction G et $M(\lambda)$ la matrice de transfert associée à l'équation de Hill sur $\mathbb{R}$, $f'' + pG^{p-1} f$

$$\begin{pmatrix} f(\Gamma) \\ f'(\Gamma) \end{pmatrix} = M(\lambda) \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}, \quad f'' + pG^{p-1} f + \lambda f = 0. \tag{3.4}$$

On a $\det M(\lambda) = 1$ et les valeurs propres de $M(\lambda)$ sont réelles si, et seulement si, $|\mathrm{tr}(M(\lambda))| \geq 2$.

Soit $Z(s)$ l'opérateur reliant les données de Cauchy des solutions de (3.3) entre les instants 0 et s. Par définition de M, on a

$$Z(\Gamma) \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{e}^{iz\zeta} M(\zeta^2) \begin{pmatrix} \widehat{w}_0(\zeta) \\ \widehat{w}_1(\zeta) \end{pmatrix} \mathrm{d}\zeta \tag{3.5}$$

où $\widehat{f}(\zeta) = \int \mathrm{e}^{-iz\zeta} f(z) \mathrm{d}z$ est la transformée de Fourier en z.