Bull. Soc. math. France
133 (2), 2005, p. 205–257

THÉORIE DE VORONOÏ GÉOMÉTRIQUE. PROPRIÉTÉS DE FINITUDE POUR LES FAMILLES DE RÉSEAUX ET ANALOGUES

par Christophe Bavard

Résumé. — Nous développons une *théorie de Voronoï* géométrique. En l'appliquant aux familles classiques de réseaux euclidiens (par exemple symplectiques ou orthogonaux), nous obtenons notamment de nouveaux résultats de finitude concernant les configurations de vecteurs minimaux et les réseaux particuliers (par exemple parfaits) de ces familles. Les méthodes géométriques introduites sont également illustrées par l'étude d'objets voisins (formes de Humbert) ou analogues (surfaces de Riemann).

Abstract (*Voronoï's geometric theory. Finiteness properties for families of lattices and similar objects*)

A geometric *Voronoï's theory* is developed and applied to classical families of euclidean lattices (such as symplectic or orthogonal lattices). In particular, new finiteness results are obtained concerning configurations of minimal vectors and special lattices (for example the perfect ones) in these families. The geometric methods introduced are also illustrated by the study of related objects (Humbert forms) or similar ones (Riemann surfaces).

Texte reçu le 21 mars 2003, accepté le 22 octobre 2003

Christophe Bavard, Laboratoire Bordelais d'Analyse et Géométrie, U.M.R. 5467 C.N.R.S., Université Bordeaux-I, 351, cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex (France)
E-mail : `Christophe.Bavard@math.u-bordeaux.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11H55.

Mots clefs. — Théorie de Voronoï, réseaux euclidiens.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2005/205/$ 5.00
© Société Mathématique de France

Introduction

Nous nous intéressons ici à deux aspects traditionnels de la théorie des réseaux euclidiens : premièrement les *réseaux particuliers* liés à des propriétés variationnelles d'invariants classiques (réseaux extrêmes, parfaits, ...), et deuxièmement les *configurations de vecteurs minimaux*. L'idée de considérer ces objets s'est imposée naturellement, en particulier dans l'étude de la constante d'Hermite. On sait par exemple depuis Voronoï [37] que la norme des réseaux euclidiens de déterminant 1 n'admet qu'un nombre fini de maxima locaux. De même, l'utilisation des configurations de vecteurs minimaux, formulées en termes de formes quadratiques, est assez ancienne ; on la retrouve notamment dans [27] (tables d'entiers représentant le minimum). Les résultats de finitude concernant ces réseaux particuliers et ces configurations sont préliminaires à toute classification. Ils jouent donc un rôle fondamental, aussi bien dans la théorie classique que dans ses extensions récentes (voir [7, 9, 10, 11, 26, 28]).

Les concepts précédents, issus de la théorie des réseaux, ont été définis dans le contexte général et entièrement géométrique des *systoles généralisées* de [5]. Nous proposons ici de nouveaux développements de ce point de vue : introduction de la notion de *point non dégénéré*, étude systématique des *points particuliers*, des *configurations* et de leurs relations mutuelles (première partie de l'article). Dans le cadre unificateur de cette *théorie de Voronoï géométrique*, les principaux résultats de finitude (relatifs à ces notions) connus pour les réseaux découlent essentiellement d'un petit nombre de propriétés géométriques ou topologiques élémentaires des espaces de paramètres. L'application aux familles de réseaux de ces techniques occupe une grande part de la seconde partie. Elle s'effectue en rapprochant description géométrique et étude algébrique. Ainsi, nous obtenons d'abord de nouveaux résultats de finitude, concernant notamment les réseaux *autoduaux*, par exemple orthogonaux ou symplectiques ; parallèlement, afin de compléter les propriétés de finitude et en vue de futures classifications, nous mettons en évidence des contraintes algébriques satisfaites par les réseaux autoduaux particuliers. De nouveaux résultats sont également établis dans le cadre géométrique pour les invariants de Bergé-Martinet et d'Hermite-Humbert attaché à un corps de nombre. Enfin, la portée de nos méthodes est aussi illustrée dans un contexte différent, celui des surfaces de Riemann. Voici maintenant quelques commentaires plus détaillés sur le contenu de l'article.

Les notions générales de perfection et d'eutaxie sont rappelées au § 1.1. Le cadre de [5] a été sensiblement élargi : on travaille avec une variété lisse V munie d'une connexion et de fonctions longueur f_s *convexoïdales* (définition 1.4), mais pas forcément convexes. Cette propriété a l'avantage d'être invariante par changement de paramétrage et composition au but par un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant (voir son intérêt aux §§ 2.3 et 2.4). Les configurations minimales interviennent *via* les *classes minimales*, terminologie introduite dans [8] pour les réseaux. La classe minimale associée à une configuration donnée S est l'ensemble des points de V qui admettent $(f_s)_{s\in S}$ comme famille de fonctions minimales.

Le cadre de [5] a aussi été enrichi. Nous introduisons tout d'abord la notion de point *non dégénéré* (définition 1.5) ; par exemple un réseau dont les vecteurs minimaux engendrent l'espace est non dégénéré relativement à toute famille de réseaux. Elle permet premièrement d'établir une *caractérisation* du théorème de Voronoï par la *non dégénérescence des points extrêmes* (proposition 1.5) qui clarifie l'approche de [10] pour le cas particulier des réseaux orthogonaux ou symplectiques. On ne donnait dans [5] qu'une condition suffisante assurant le théorème de Voronoï, la « condition (C) ». Deuxièmement, les points *eutactiques non dégénérés* constituent une généralisation satisfaisante des formes eutactiques de la théorie usuelle. Ainsi pour les familles de réseaux autoduaux (§ 2.7), en particulier orthogonaux ou symplectiques, ces points ont de très bonnes propriétés : *finitude* (théorème 1, 2c), *algébricité* (corollaire 1.12), *rang maximal des vecteurs minimaux dans le cas symplectique* (corollaire 2.15). Bien entendu, ces propriétés sont généralement fausses pour les points eutactiques, même dans les meilleures situations (réseaux symplectiques par exemple). Ensuite, les relations entre perfection, eutaxie et classes minimales sont systématiquement explorées : caractérisation variationnelle des points eutactiques dans une classe (proposition 1.6), propriétés d'isolement des points parfaits ou eutactiques dans une classe (proposition 1.8 et 1.9) en vue de résultats de finitude et d'algébricité (lemme 1.11 et corollaire 1.12).

Les problèmes de finitude dans V se posent toujours modulo l'action d'un certain groupe discret naturel de difféomorphismes Γ qui préserve toutes les structures en jeu (géométriques et algébriques). Typiquement, V est un espace « d'objets marqués » (espace de formes quadratiques, espace de Teichmüller, ...) tandis que $\Gamma\backslash V$ paramètre les « modules » de ces objets (réseaux, surfaces de Riemann, ...). Pour traiter les questions de finitude nous procédons selon le schéma général suivant. Nous cherchons tout d'abord un théorème de compacité de type Mahler dans l'espace des modules $\Gamma\backslash V$. Pour les familles de réseaux, ces propriétés de compacité traduisent ou remplacent très souvent des arguments de nature combinatoire. Nous établissons ensuite un résultat de finitude pour un certain type de classes minimales liées à la nature des objets étudiés et qui restent loin de l'infini dans $\Gamma\backslash V$, par exemple les classes « non isotropes » pour les réseaux autoduaux (proposition 2.13) ou pour les surfaces de Riemann (§ 2.12). Puis nous montrons que les points particuliers (parfaits, ...), grâce à leurs propriétés algébriques, appartiennent aux classes en question (exemple : théorème 1, 1). Il reste enfin à établir qu'ils sont en nombre fini dans chaque classe minimale, soit par un argument variationnel pour les points eutactiques (proposition 1.6), soit par un lemme de géométrie algébrique (lemme 1.11) pour les points parfaits.

Cette démarche est mise en œuvre dans la deuxième partie de l'article pour les familles de réseaux, que nous paramétrons par des sous-variétés totalement géodésiques et algébriques V de l'espace symétrique riemannien $P_n^{\mathbb{R}}$ des formes quadratiques. Dans les situations naturelles, V apparaît aussi comme une orbite d'un groupe de Lie réel $G(\mathbb{R})$. Les propriétés de compacité de $G(\mathbb{Z})\backslash G(\mathbb{R})$ pour certains groupes algébriques complexes G (par exemple réductifs) sont classiques dans l'étude des groupes arithmétiques. Des techniques correspondantes, nous avons extrait une condition élémentaire et facilement vérifiable (la « pseudo-algébricité ») qui assure la compacité dans les familles de réseaux (proposition 2.1).

Les familles de réseaux les plus simples sont les réseaux usuels muni de l'action d'un groupe fini (Π-réseaux). Leur comportement est totalement analogue au cas usuel où Π est trivial (voir [9, 12, 26, 11]). Munies d'une carte affine globale et d'une connexion naturelle (§ 2.3), elles ont des propriétés géométriques très fortes, par exemple les classes minimales sont géodésiques ; nous donnons ainsi une description précise de ce cas (proposition 2.5) qui contient les résultats de finitude connus (voir corollaire 2.6 et note 2.5). Plus généralement il est important de considérer une famille quelconque V munie d'une action ρ d'un groupe fini préservant la caractérisation, en général algébrique, des éléments de V. Cette situation est décrite par le lieu des points fixes V^ρ dont les propriétés (géométriques, algébriques et topologiques) sont établies à la proposition 2.7. L'étude pratique de V^ρ quand il est de petite dimension permet souvent de mettre en évidence des réseaux intéressants ; c'est une source importante d'exemples (voir [6] pour le cas symplectique). Dans le même esprit, l'eutaxie relativement à V se lit dans V^ρ (lemme 2.8). Le contexte équivariant permet également de donner une interprétation symplectique de l'invariant de Bergé-Martinet (§ 2.10).

Nous proposons ensuite une étude unifiée des autres familles naturelles de réseaux (orthogonaux, symplectiques, ...) sous le terme de *réseaux autoduaux pour une forme bilinéaire ou sesquilinéaire* b (§ 2.7). Comme les réseaux hermitiens complexes et quaternioniens correspondent aussi à un espace symétrique $P_m^{\boldsymbol{k}}$ ($\boldsymbol{k} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$) muni de longueurs analogues au cas réel (§ 2.6), il n'y avait pas de raison de se limiter à ce cas. D'autre part, compte tenu des motivations évoquées plus haut, nous nous sommes placés dans le contexte équivariant. À type algébrique fixé (définition 2.2), les réseaux b-autoduaux sont paramétrés par un espace symétrique (proposition 2.9, exemple 2.11) avec de bonnes propriétés algébriques et topologiques (proposition 2.11 et corollaire 2.12). Nous exploitons systématiquement la structure algébrique définie par b. Ainsi, une fois la notion centrale de *classes non isotropes* définie, la finitude de ces classes (proposition 2.13) résulte facilement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui dans notre cadre remplace avantageusement celle de Hadamard.

Dans le cas où b est *réflexive* (§ 2.8), qui recouvre les principales familles classiques (par exemple associées aux espaces symétriques irréductibles, exemple 2.11), les résultats sont plus précis. Nous obtenons tout d'abord le fait que *les réseaux faiblement eutactiques sont non isotropes*, d'où découle la *finitude des réseaux parfaits ou eutactiques non dégénérés* (théorème 1). Parallèlement, en comparant les caractéristiques algébriques de b (isotropie) avec celles de l'action (types), nous mettons en évidence des contraintes fortes sur les vecteurs minimaux de ces réseaux, notamment sur leur rang (théorème 2, 3 et corollaire 2.16, 2.17). Par exemple, *dans le cas symplectique, le rang des vecteurs minimaux est maximal pour un réseau parfait si l'action est isotypique et symplectique, ou pour un réseau eutactique non dégénéré si l'action est diagonalisable.* Enfin, une étude algébrique des classes minimales voisines de l'infini (*i.e.* isotropes) permet d'établir la finitude des classes minimales dans le cas réel ou complexe sans action (théorème 4).

L'interprétation symplectique équivariante de l'invariant de Bergé-Martinet $\gamma'_{m,1}$ (§ 2.10) fournit une définition naturelle des *couples parfaits* de [7] (proposition 2.20) et permet, en particulier avec la finitude des classes non isotropes, de retrouver les propriétés de finitude liées à $\gamma'_{m,1}$ (voir note 2.18). À l'aide d'un invariant $\nu_{m,k}$ très voisin de l'invariant de Bergé-Martinet-Rankin $\gamma'_{m,k}$ $(1 \leq k \leq m-1)$, nous établissons une caractérisation des maxima locaux de $\gamma'_{m,k}$, répondant ainsi au problème 6.10 de [28, ch. X] et à son analogue complexe (théorème 5).

Une autre illustration des méthodes géométriques est donnée par l'étude des *formes de Humbert* associées à un corps de nombre (§ 2.11). Nous prouvons notamment que *l'invariant d'Hermite-Humbert vérifie la condition* (C) (proposition 2.22), donc le théorème de Voronoï (voir [19]), et que les formes de Humbert non dégénérées restent loin de l'infini, avec comme corollaire la *finitude des formes de Humbert eutactiques non dégénérées* (proposition 2.24).

La systole des surfaces de Riemann est examinée au § 2.12. Inspirée du cas des réseaux, la notion de *surface isotrope* nous permet de prouver des résultats analogues : *les surfaces de Riemann parfaites ou eutactiques pour la systole sont non isotropes et en nombre fini ; de plus les longueurs de leurs géodésiques fermées sont des logarithmes de nombres algébriques* (théorème 6).

Plan de l'article