

## SUR LE RANG DES JACOBIENNES SUR UN CORPS DE FONCTIONS

PAR MARC HINDRY & AMÍLCAR PACHECO

---

RÉSUMÉ. — Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow C$  une surface projective fibrée au-dessus d'une courbe et définie sur un corps de nombres  $k$ . Nous donnons une interprétation du rang du groupe de Mordell-Weil sur  $k(C)$  de la jacobienne de la fibre générique (modulo la partie constante) en termes de moyenne des traces de Frobenius sur les fibres de  $f$ . L'énoncé fournit une réinterprétation de la conjecture de Tate pour la surface  $\mathcal{X}$  et généralise des résultats de Nagao, Rosen-Silverman et Wazir.

ABSTRACT (*On the rank of Jacobians on a function field*). — Let  $f : \mathcal{X} \rightarrow C$  be a projective surface fibered over a curve and defined over a number field  $k$ . We give an interpretation of the rank of the Mordell-Weil group over  $k(C)$  of the jacobian of the generic fibre (modulo the constant part) in terms of average of the traces of Frobenius on the fibers of  $f$ . The results also give a reinterpretation of the Tate conjecture for the surface  $\mathcal{X}$  and generalizes results of Nagao, Rosen-Silverman and Wazir.

---

*Texte reçu le 21 avril 2003, révisé le 8 octobre 2003, accepté le 7 novembre 2003*

MARC HINDRY, Université Denis Diderot Paris VII, U.F.R. Mathématiques, case 7012, 2 Place Jussieu, 75251 Paris (France) • *E-mail* : hindry@math.jussieu.fr

AMÍLCAR PACHECO, Universidade Federal do Rio de Janeiro (Universidade do Brasil), Departamento de Matemática Pura, Rua Guaiacul 83, Cachambi, 20785-050 Rio de Janeiro RJ(Brasil) • *E-mail* : amilcar@impa.br

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G, 11G40, 11M, 14G10.

Mots clefs. — Variété jacobienne, corps de fonctions, conjecture de Tate.

Amílcar Pacheco a été partiellement soutenu par la bourse de recherche CNPq 300896/91-3 et par le projet PRONEX 41.96.0830.00. Ce travail a commencé pendant une visite du premier auteur au deuxième auteur à l'IMPA dans le cadre de l'accord Brésil-France 69.0014/01-5.

## 1. Introduction

Soient  $k$  un corps de nombres,  $\mathcal{X}$  une surface projective lisse irréductible sur  $k$ ,  $C$  une courbe projective lisse irréductible sur  $k$ ,  $f : \mathcal{X} \rightarrow C$  un morphisme propre plat tel que les fibres soient des courbes de genre arithmétique  $g \geq 1$ ; ces hypothèses entraînent que la fibre générique est lisse et irréductible. Soient  $\bar{K} = k(C)$  le corps de fonctions de  $C$ ,  $X/\bar{K}$  la fibre générique de  $f$ ,  $J_X$  la variété jacobienne de  $X$  et  $(\tau, B)$  la  $\bar{K}/k$ -trace de  $J_X$ . Un théorème de Lang-Néron affirme que  $J_X(k(C))/\tau(B(k))$  et même  $J_X(\bar{k}(C))/\tau(B(\bar{k}))$  sont des groupes de type fini. Shioda [15] a donné une interprétation du deuxième groupe comme quotient du groupe de Néron-Severi de la surface  $\mathcal{X}$  par un sous-groupe explicite. Nous allons discuter une interprétation du *rang* du premier groupe en termes de l'arithmétique de la surface  $\mathcal{X}$ .

Soit  $S$  un ensemble fini d'idéaux premiers de l'anneau d'entiers  $\mathcal{O}_k$  de  $k$  tel que pour tout  $\mathfrak{p} \notin S$ ,  $\mathcal{X}$  et  $C$  aient bonne réduction modulo  $\mathfrak{p}$  et que la réduction  $f_{\mathfrak{p}}$  de  $f$  modulo  $\mathfrak{p}$  soit un morphisme propre et plat  $f_{\mathfrak{p}} : \mathcal{X}_{\mathfrak{p}} \rightarrow C_{\mathfrak{p}}$  ayant pour fibres des courbes de genre arithmétique  $g$  sur le corps résiduel  $\kappa_{\mathfrak{p}}$  de  $\mathfrak{p}$  avec  $q_{\mathfrak{p}}$  éléments. Pour chaque  $c \in C_{\mathfrak{p}}$ , soit  $\mathcal{X}_{\mathfrak{p},c} = f_{\mathfrak{p}}^{-1}(c)$  la fibre de  $f_{\mathfrak{p}}$  en  $c$ .

NOTATION. — Soient  $\ell$  un corps,  $\bar{\ell}$  une clôture algébrique de  $\ell$  et  $V$  une variété algébrique projective lisse définie sur  $\ell$ . Notons  $\bar{V} = V \times_{\ell} \bar{\ell}$ . Si  $\ell$  est parfait, notons aussi  $G_{\ell} = \text{Gal}(\bar{\ell}/\ell)$ .

Soient  $F_{\mathfrak{p}} \in G_k$  un élément de Frobenius et  $I_{\mathfrak{p}} \subset G_k$  son groupe d'inertie. Soit  $\Delta = \{c \in C \mid \mathcal{X}_{\mathfrak{p},c} \text{ est singulière}\}$  le lieu discriminant de  $f$ . Après avoir élargi  $S$  si nécessaire, on peut supposer que pour tout  $\mathfrak{p} \notin S$  le lieu discriminant  $\Delta_{\mathfrak{p}}$  de  $f_{\mathfrak{p}}$  est égal à la réduction du lieu discriminant de  $f$  modulo  $\mathfrak{p}$ .

Soit  $\bar{F}_{\mathfrak{p}}$  l'automorphisme de Frobenius sur  $H_{\text{ét}}^1(\bar{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},c}, \mathbb{Q}_{\ell})$  induit par l'automorphisme de Frobenius géométrique de  $\kappa_{\mathfrak{p}}$ . Si  $c \in (C_{\mathfrak{p}} - \Delta_{\mathfrak{p}})(\kappa_{\mathfrak{p}})$ , on définit

$$a_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}_{\mathfrak{p},c}) = \text{Tr}(\bar{F}_{\mathfrak{p}} \mid H_{\text{ét}}^1(\bar{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},c}, \mathbb{Q}_{\ell})).$$

Si  $c \in \Delta_{\mathfrak{p}}(\kappa_{\mathfrak{p}})$ , on remplace  $H_{\text{ét}}^1$  par le groupe  $H_{\mathbb{Z}}^1$  de cohomologie  $\ell$ -adique à support propre, *i.e.*,  $a_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}_{\mathfrak{p},c}) = \text{Tr}(\bar{F}_{\mathfrak{p}} \mid H_{\mathbb{Z}}^1(\bar{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p},c}, \mathbb{Q}_{\ell}))$ .

Soit  $a_{\mathfrak{p}}(B) = \text{Tr}(F_{\mathfrak{p}} \mid H_{\text{ét}}^1(\bar{B}, \mathbb{Q}_{\ell})^{I_{\mathfrak{p}}})$ . Après avoir ajouté un nombre fini d'idéaux premiers de  $k$  à  $S$  on peut supposer que, pour tout  $\mathfrak{p} \notin S$ , la variété  $B$  ait bonne réduction  $B_{\mathfrak{p}}$  modulo  $\mathfrak{p}$ . Dans ce cas là,  $a_{\mathfrak{p}}(B) = \text{Tr}(\bar{F}_{\mathfrak{p}} \mid H_{\text{ét}}^1(\bar{B}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_{\ell}))$ . On définit alors la *trace moyenne* de Frobenius

$$A_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) = \frac{1}{q_{\mathfrak{p}}} \sum_{c \in C_{\mathfrak{p}}(\kappa_{\mathfrak{p}})} a_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}_{\mathfrak{p},c})$$

ainsi que *trace moyenne réduite*

$$A_{\mathfrak{p}}^*(\mathcal{X}) = A_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X}) - a_{\mathfrak{p}}(B).$$

Soit  $L_2(\mathcal{X}/k, s) = \prod_{\mathfrak{p}} \det(1 - F_{\mathfrak{p}} q_{\mathfrak{p}}^{-s} | H_{\text{ét}}^2(\overline{\mathcal{X}}, \mathbb{Q}_{\ell})^{I_{\mathfrak{p}}})^{-1}$  la fonction  $L$  de  $\mathcal{X}$  associée à  $H_{\text{ét}}^2(\overline{\mathcal{X}}, \mathbb{Q}_{\ell})$ . Soient  $\text{Pic}(\mathcal{X})$  le groupe des classes de diviseurs de  $\mathcal{X}$ ,  $\text{Pic}^0(\mathcal{X})$  le sous-groupe de diviseurs algébriquement équivalents à zéro,  $\text{NS}(\mathcal{X}) = \text{Pic}(\mathcal{X})/\text{Pic}^0(\mathcal{X})$  le groupe de Néron-Severi de  $\mathcal{X}$  et  $\text{NS}(\mathcal{X}/k)$  le sous-groupe de classes de diviseurs de  $\text{NS}(\mathcal{X})$  qui sont définies sur  $k$ . Notons que si  $z$  est fixé par  $G_k$ , i.e.,  $z \in \text{NS}(\mathcal{X})^{G_k}$ , il existe un multiple  $nz$  de  $z$  tel que  $nz \in \text{NS}(\mathcal{X}/k)$ . Donc,  $\text{NS}(\mathcal{X})^{G_k} \otimes \mathbb{Q} \cong \text{NS}(\mathcal{X}/k) \otimes \mathbb{Q}$  et en particulier  $\text{rang}(\text{NS}(\mathcal{X})^{G_k}) = \text{rang}(\text{NS}(\mathcal{X}/k))$ .

CONJECTURE 1.1 (conjecture de Tate [16]). — *La fonction  $L_2(\mathcal{X}/k, s)$  possède un pôle en  $s = 2$  d'ordre  $\text{rang}(\text{NS}(\mathcal{X}/k))$ .*

REMARQUE 1.2. — Il s'agit d'une version de la conjecture de Tate pour les diviseurs, la conjecture générale concerne tous les cycles algébriques.

1) On peut se dispenser de l'hypothèse d'un prolongement méromorphe au voisinage de  $s = 2$  en interprétant la phrase «  $L_2(\mathcal{X}/k, s)$  possède un pôle d'ordre  $t$  en  $s = 2$  » comme signifiant

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 2 \\ \text{Re}(s) > 2}} (s - 2)^t L_2(\mathcal{X}/k, s) = \alpha \neq 0.$$

De même, si  $f(s)$  est holomorphe sur  $\text{Re}(s) > \lambda$  et si

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda) f(s) = \alpha \neq 0,$$

on appellera  $\alpha$  le *résidu* de la fonction  $f(s)$  en  $s = \lambda$  et on écrira  $\text{Rés}_{s=\lambda} f(s) = \alpha$ .

2) Dans la plupart des cas où l'on sait démontrer un prolongement analytique de  $L_2(\mathcal{X}/k, s)$  à la droite  $\text{Re}(s) = 2$ , on sait également démontrer que la fonction ne s'annule pas sur cette droite. Cette propriété est importante car elle permet d'appliquer un théorème taubérien [7, ch. XV] à la dérivée logarithmique de  $L_2(\mathcal{X}/k, s)$ .

Le but de ce travail est de prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 1.3. — *La conjecture 1.1 pour la surface  $\mathcal{X}$  implique*

$$(1.1) \quad \text{Rés}_{s=1} \left( \sum_{\mathfrak{p} \notin S} -A_{\mathfrak{p}}^*(\mathcal{X}) \frac{\log(q_{\mathfrak{p}})}{q_{\mathfrak{p}}^s} \right) = \text{rang} \left( \frac{J_{\mathcal{X}}(K)}{\tau B(k)} \right).$$

*Sous l'hypothèse additionnelle que  $L_2(\mathcal{X}/k, s)$  se prolonge analytiquement sur la droite  $\text{Re}(s) = 2$  et n'a pas de zéros sur cette droite, on conclut aussi que*

$$(1.2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( \sum_{\substack{\mathfrak{p} \notin S \\ q_{\mathfrak{p}} \leq T}} -A_{\mathfrak{p}}^*(\mathcal{X}) \log(q_{\mathfrak{p}}) \right) = \text{rang} \left( \frac{J_{\mathcal{X}}(K)}{\tau B(k)} \right).$$

REMARQUE 1.4. — En fait l'égalité (1.1) est essentiellement équivalente à la conjecture de Tate 1.1, voir le corollaire 5.8. L'égalité (1.1) est une généralisation de la *conjecture analytique de Nagao* [14, Nagao's Conjecture 1.1'] et (1.2) de la *conjecture taubérienne de Nagao* [14, Nagao's Conjecture 1.1] telles qu'elles sont formulées par Rosen et Silverman pour les fibrations de genre 1 admettant une section; lorsque de plus  $C = \mathbb{P}^1$  et  $k = \mathbb{Q}$ , la forme taubérienne est la conjecture originelle, due à Nagao [10], [11] (nous préférons appeler « taubérienne » la forme de la conjecture que Rosen et Silverman appellent « arithmetic »).

REMARQUE 1.5. — Le premier travail dans la direction du théorème 1.3 est dû à Nagao [11] qui a formulé la conjecture taubérienne à partir de calculs explicites dans le cas où  $g = 1$  et  $f$  admet une section (donc  $X$  est une courbe elliptique) et  $K = \mathbb{Q}(x)$ . Son objectif, atteint dans plusieurs cas, était de produire des courbes elliptiques sur  $\mathbb{Q}$  avec rang « assez grand ». Par la suite, Rosen et Silverman dans [14, th. 1.3] ont traité le cas général où  $K = k(C)$  est le corps de fonctions d'une courbe lisse et projective sur  $k$ , toujours avec  $X$  courbe elliptique. Ils ont formulé la conjecture analytique et l'ont reliée avec la formulation taubérienne, montrant le théorème 1.3 dans ce cas. Plus tard, Wazir [19, th. 1.1] a généralisé le résultat de Rosen-Silverman au cas d'une variété  $\mathcal{X}$  de dimension 3 fibrée au-dessus d'une surface en courbes elliptiques. On peut s'attendre à ce que l'énoncé du théorème reste vrai pour toute fibration en courbe  $f : \mathcal{X} \rightarrow T$  de genre au moins 1 avec  $n = \dim \mathcal{X} = \dim T + 1$  mais nous nous contenterons ici de traiter le cas des surfaces.

## 2. Conjecture de Birch et Swinnerton Dyer et conjecture de Tate

Ce paragraphe contient les motivations pour le théorème principal ainsi que des considérations de nature spéculative; on explique en particulier pourquoi il est nécessaire de remplacer la trace moyenne  $A_{\mathfrak{p}}(\mathcal{X})$  par la trace moyenne « réduite »  $A_{\mathfrak{p}}^*(\mathcal{X})$  pour espérer un énoncé du type (1.2).

NOTATION. — Comme il est d'usage, pour deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  définies au voisinage de  $\omega$ , on écrira,  $f(t) = O(g(t))$  si il existe un voisinage de  $\omega$  et une constante  $C$  tels que  $|f(t)| \leq Cg(t)$  sur ce voisinage. On écrira  $f(t) = o(g(t))$  si  $\lim_{t \rightarrow \omega} f(t)/g(t) = 0$ .

Si  $\mathcal{X}$  est une variété lisse projective, définie sur un corps de nombres  $k$ , ayant bonne réduction hors d'un ensemble fini de places  $S$ , on notera, en négligeant un nombre fini de facteurs eulériens

$$L_2(\mathcal{X}/k, s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \det(1 - F_{\mathfrak{p}} q_{\mathfrak{p}}^{-s} | H_{\text{ét}}^2(\mathcal{X} \times_k \bar{k}, \mathbb{Q}_{\ell}))^{-1}.$$

Pour  $\mathfrak{p}$  ne divisant pas le conducteur, les valeurs propres du Frobenius  $F_{\mathfrak{p}}$  sont de modules  $q_{\mathfrak{p}}$ . Le produit d'Euler converge pour  $\text{Re}(s) > 2$ . La conjecture 1.1 donne une interprétation du rang du groupe de Néron-Severi  $\text{NS}(\mathcal{X})$  en termes de cette fonction. La conjecture 1.1 est en fait formulée pour une variété de dimension quelconque [13, 5.5].

Si  $A$  est une variété abélienne définie sur un corps de nombres  $k$ , on notera simplement sa fonction  $L$  :

$$L(A/k, s) = \prod_{\mathfrak{p}} \det(1 - F_{\mathfrak{p}} q_{\mathfrak{p}}^{-s} | H_{\text{ét}}^1(A \times_k \bar{k}, \mathbb{Q}_{\ell})^{I_{\mathfrak{p}}})^{-1}.$$

Pour  $\mathfrak{p}$  ne divisant pas le conducteur, les valeurs propres du Frobenius  $F_{\mathfrak{p}}$ , disons  $\alpha_{\mathfrak{p},j}$ , sont de modules  $q_{\mathfrak{p}}^{1/2}$ . Le produit d'Euler converge pour  $\text{Re}(s) > \frac{3}{2}$ . La conjecture centrale de la théorie donne une interprétation du rang du groupe de Mordell-Weil  $A(k)$  en termes de cette fonction.

CONJECTURE 2.1 (conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer [16])

Soit  $A$  une variété abélienne définie sur un corps de nombres  $k$ . La fonction  $L(A/k, s)$  admet un prolongement analytique à  $\mathbb{C}$  et possède en  $s = 1$  un zéro d'ordre  $\text{rang}(A(k))$ .

REMARQUE 2.2. — Il s'agit ici de la première partie de la conjecture ; nous ne discuterons pas la seconde partie qui décrit le coefficient dominant de  $L(A/k, s)$  en  $s = 1$ .

Un calcul simple et classique montre que

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}(\log(L(A/k, s))) &= \sum_{\mathfrak{p}, m \geq 1} \sum_j \alpha_{\mathfrak{p},j}^m \log(q_{\mathfrak{p}}) q_{\mathfrak{p}}^{-ms} \\ &= \sum_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}}(A) \log(q_{\mathfrak{p}}) q_{\mathfrak{p}}^{-s} + h_1(s) \\ &= \sum_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}}(A) \log(q_{\mathfrak{p}}) q_{\mathfrak{p}}^{-s} + \sum_{\mathfrak{p}} \sum_j \alpha_{\mathfrak{p},j}^2 \log(q_{\mathfrak{p}}) q_{\mathfrak{p}}^{-2s} + h_2(s) \end{aligned}$$

avec  $h_1(s)$  holomorphe sur  $\text{Re}(s) > 1$  et  $h_2(s)$  holomorphe sur  $\text{Re}(s) > \frac{5}{6}$ . Définissons

$$M(A/k, s) = \sum_{\mathfrak{p}} -a_{\mathfrak{p}}(A) \log(q_{\mathfrak{p}}) q_{\mathfrak{p}}^{-s}$$

ainsi que la fonction arithmétique correspondante

$$M_A(T) = \sum_{q_{\mathfrak{p}} \leq T} -a_{\mathfrak{p}}(A) \log(q_{\mathfrak{p}}).$$

Alors le prolongement analytique de  $L(A/k, s)$  jusqu'à  $\text{Re}(s) = 1$  équivaut à celui de  $M(A/k, s)$  et un zéro d'ordre  $r$  en  $s = 1$  pour  $L(A/k, s)$  équivaut à un pôle simple pour  $M(A/k, s)$  en  $s = 1$  avec résidu  $r$ . Remarquons aussi