Bull. Soc. math. France
133 (2), 2005, p. 297–329

PROLONGEMENTS ANALYTIQUES D'UNE CLASSE DE FONCTIONS ZÊTA DES HAUTEURS ET APPLICATIONS

PAR D. ESSOUABRI

RÉSUMÉ. — Nous montrons dans la première partie l'existence d'un prolongement méromorphe à *tout le plan complexe* $\mathbb{C}$ et explicitons les propriétés et quelques conséquences, d'une large classe de séries zêta des hauteurs associées à l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$ ($n \geq 1$). Nous montrons dans la deuxième partie que, dans le cas du plan projectif éclaté en un point sur $\mathbb{Q}$, les fonctions zêta de hauteur associées aux fibrés en droite dont les classes sont à l'intérieur du cône des diviseurs effectifs possèdent des prolongements méromorphes à *tout le plan complexe* $\mathbb{C}$. Comme conséquence, ce résultat permet de redémontrer la conjecture de Manin dans ce cas mais avec un meilleur terme d'erreur que ceux connus. Il permet surtout de déterminer, le *second terme* en $\log B$ apparaissant dans la conjecture de Manin.

ABSTRACT (*Analytic continuation of a class of zeta functions of heights*)
In the first part of this paper, we prove that a large class of zeta functions associated to the projective space $\mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$, ($n \geq 1$), have meromorphic continuations to the *whole complex plane* $\mathbb{C}$ satisfying suitable properties and give some arithmetical consequences. In the second part, we prove that the height zeta functions associated to metrized line bundles on the projective plan blown up at a point, have meromorphic continuations to the *whole complex plane* $\mathbb{C}$ with moderate growth and give a set of candidate poles. As an application, we give a new proof of Manin's conjecture in this case, we calculate the *second term* and improve its error term.

Texte reçu le 13 mai 2003, accepté le 14 novembre 2003

D. ESSOUABRI, Université de Caen, UFR des Sciences, Campus 2, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme (LMNO), CNRS UMR 6139, Bd Maréchal Juin, BP 5186, 14032 Caen (France) • *E-mail :* essoua@math.unicaen.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G05, 14G10, 14G40, 11M41.

Mots clefs. — Fonctions zêta des hauteurs, points rationnels, fibrés vectoriels, fonction de comptage, prolongement méromorphe, conjecture de Manin.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2005/297/\$ 5.00
© Société Mathématique de France

1. Introduction, description du problème et notations

1.1. Introduction générale. — Soit X une variété algébrique projective sur un corps de nombre k. On associe à tout fibré en droite $\mathcal{L}$ muni d'une métrique, une fonction hauteur $H_{\mathcal{L}} : X(k) \mapsto \mathbb{R}_+^*$ (voir [1], [7], [16], [14]). La conjecture de Manin raffinée par Peyre, Batyrev et Tschinkel, prédit que si la classe $L = [\mathcal{L}]$ de $\mathcal{L}$ dans $\mathrm{Pic}(X)$ est contenue dans l'intérieur du cône des diviseurs effectifs (*i.e.* le cône engendré par les classes des fibrés en droites $\mathcal{L}$ vérifiant $\Gamma(X,\mathcal{L}) \neq \{0\}$), il existe alors un ouvert Zariski dense U de X et des constantes $a(L)$, $b(L)$ et $\theta(U,\mathcal{L})$ strictement positives, tels que lorsque B tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} N(U,\mathcal{L},B) &:= \big\{M \in X(k) \mid H_{\mathcal{L}}(M) \le B\big\} \\ &= \frac{\theta(U,\mathcal{L})B^{a(L)}(\log B)^{b(L)-1}}{a(L)(b(L)-1)!}\big(1+o(1)\big). \end{aligned}$$

Même si cette conjecture est fausse en général (voir [2]), elle reste néanmoins pertinente pour une large classe de variétés et elle a été montrée dans certains cas (voir par exemple [3], [4], [5], [14], *etc.*).

La conjecture de Manin est liée *via* des théorèmes taubériens standard, aux propriétés analytiques des séries zêta des hauteurs

$$Z_U(\mathcal{L};s) = \sum_{P \in U(k)} H_{\mathcal{L}}^{-s}(P) \quad (s \in \mathbb{C}).$$

Plus précisément, si on démontre que la fonction zêta $s \mapsto Z_U(\mathcal{L};s)$ possède un demi-plan de convergence et d'holomorphie de la forme $\{\mathrm{Re}(s) > \sigma_a\}$, qu'elle se prolonge méromorphiquement (avec croissance modérée sur les bandes verticales et σ_a comme seul pôle) à un demi-plan de la forme $\{\mathrm{Re}(s) > \sigma_a - \delta\}$ ($\delta > 0$), les théorèmes taubériens standard impliquent alors qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ et une constante $\delta' = \delta'(\delta,U,\mathcal{L}) > 0$ tels que

$$N(U,\mathcal{L},B) = \frac{\theta(U,\mathcal{L})}{a(L)\,(b(L)-1)!}B^{a(L)}Q(\log B) + \mathcal{O}(B^{a(L)-\delta'}) \quad (B \to +\infty).$$

Il est à noter que δ' est une fonction croissante en δ. D'où l'intérêt d'avoir un prolongement méromorphe au plus grand demi-plan possible. À l'exception de certaines variétés de drapeaux généralisées (voir par exemple [7]) pour lesquelles le travail repose sur la difficile théorie de Langlands, les méthodes utilisées jusqu'à maintenant donnent le prolongement méromorphe à un demi-plan vertical mais pas à tout le plan complexe.

Nous montrons dans la première partie l'existence d'un prolongement méromorphe à *tout le plan complexe* $\mathbb{C}$ et explicitons les propriétés et quelques conséquences, d'une large classe de séries zêta des hauteurs associées à l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$ ($n \ge 1$) (voir la section qui suit pour les définitions de ces séries).

Nous montrons d'une façon *simple* dans la deuxième partie que, dans le cas du plan projectif éclaté en un point sur $\mathbb{Q}$, les fonctions zêta de hauteur associées aux fibrés en droite dont les classes sont à l'intérieur du cône des diviseurs effectifs possèdent des prolongements méromorphes à *tout le plan complexe* $\mathbb{C}$ et que ces prolongements sont à croissance modérée sur les bandes verticales. Ce résultat permet en particulier de redémontrer la conjecture de Manin dans ce cas mais avec un meilleur terme d'erreur que ceux connus. Notre travail permet aussi de déterminer dans ce cas, le *second terme* en $\log B$ apparaissant dans la conjecture de Manin ; c'est la première fois que ce second terme est explicité.

Les deux hauteurs les plus connues sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$ sont définies comme suit. Pour $M = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$ avec $x_i \in \mathbb{Z}$ et $\operatorname{pgcd}(x_0, \ldots, x_n) = 1$ (on peut toujours se ramener à ce cas), on définit (voir [14], [13], [16]) :

$$(1)\quad H^n_\infty(x_0 : \ldots : x_n) = \sup_{0 \le i \le n} |x_i| \quad \text{et} \quad H^n_2(x_0 : \ldots : x_n) = \sqrt{x_0^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Il est clair (voir ci-dessous par exemple) que si X désigne une variété algébrique projective sur $\mathbb{Q}$, le choix d'une de ces deux hauteurs H sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$ détermine une famille de hauteurs $(H_{\mathcal{L}})_{\mathcal{L}}$ ($\mathcal{L}$ fibré en droite au-dessus de X) sur $X(\mathbb{Q})$. Dans le cas du plan projectif éclaté en un point sur $\mathbb{Q}$, nous traitons par souci d'unité chacune des deux familles $(H^i_{\mathcal{L}})_{\mathcal{L}}$ ($i = \infty, 2$) associées aux hauteurs classiques H_i définies ci-dessus.

Il est à noter que dans le cas des espaces projectifs et du plan projectif éclaté en un point (comme dans la majorité des cas déjà résolus) les points rationnels sont paramétrisables et les résultats doivent être compris comme concernant les hauteurs associées à divers fibrés en droites $\mathcal{L}$.

Notons enfin que l'existence de prolongement méromorphe à tout le plan complexe d'une fonction zêta implique l'existence d'un développement limité de la fonction de comptage associée, mais il ne lui est pas équivalent. Il contient beaucoup plus d'informations arithmétiques qu'un simple développement limité. D'ailleurs même dans les cas où la conjecture est démontrée, l'existence d'un prolongement méromorphe n'est pas assurée comme le montre le contre-exemple du plan projectif éclaté en deux points (voir [2]).

Remerciements. — Je tiens à remercier Ph. Satgé pour ses conseils et suggestions le long de ce travail. Je remercie également D. Barlet, R. de la Bretèche et E. Peyre pour leurs critiques qui ont permis d'améliorer la présentation de la première version de cet article.

1.2. Description du problème et notations

1.2.1. Cas de l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$ ($n \ge 1$). — Soit $\mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$ l'espace projectif de dimension n sur $\mathbb{Q}$. Sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$, on définit des hauteurs pour mesurer la taille des points. Les deux plus connues sont H^n_∞ et H^n_2 définies par la relation (1).

Plus généralement, on définit pour $P \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_n]$ de degré $d \geq 1$, positif sur $\mathbb{R}_+^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, et pour tout $M = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$ $(x_i \in \mathbb{Z})$:

$$H_P^n(x_0 : \dots : x_n) = P\Big(\frac{|x_0|}{\operatorname{pgcd}(x_0, \dots, x_n)}, \dots, \frac{|x_n|}{\operatorname{pgcd}(x_0, \dots, x_n)}\Big)^{1/d}.$$

Avec ces notations, on a évidemment, $H_2 = H_{P_0}$ où $P_0 = X_0^2 + \dots + X_n^2$.

Dans la suite et sauf cas de confusion, on omettra l'exposant n dans la définition des hauteurs sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$, on notera H_i la hauteur(1) H_i^n $(i = \infty, 2$ et $P \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_n])$. On pose aussi

$$V_n(\mathbb{Q}) = \big\{M = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{Q}) \mid x_0 \dots x_n \neq 0\big\}.$$

On associe des fonctions zêta aux différentes hauteurs définies ci-dessus comme suit :

$$\left\{\begin{aligned} Z_{n,\infty}(s) &= \sum_{M \in \mathbb{P}_n(\mathbb{Q})} \frac{1}{H_\infty(M)^s}, & Z_{n,\infty}^*(s) &= \sum_{M \in V_n(\mathbb{Q})} \frac{1}{H_\infty(M)^s}, \\ Z_{n,2}(s) &= \sum_{M \in \mathbb{P}_n(\mathbb{Q})} \frac{1}{H_2(M)^s}, & Z_{n,2}^*(s) &= \sum_{M \in V_n(\mathbb{Q})} \frac{1}{H_2(M)^s}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Pour tout polynôme elliptique $P \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_n]$ de degré $d \geq 1$ (voir la définition 1 ci-dessous), on pose

$$Z_{\mathrm{proj}}(P; s) = \sum_{M \in \mathbb{P}_n(\mathbb{Q})} \frac{1}{H_P(M)^s}, \quad Z_{\mathrm{proj}}^*(P; s) = \sum_{M \in V_n(\mathbb{Q})} \frac{1}{H_P(M)^s}.$$

En particulier,

$$Z_{n,2}(s) = Z_{\mathrm{proj}}(P_0; s) \quad \text{et} \quad Z_{n,2}^*(s) = Z_{\mathrm{proj}}^*(P_0; s)$$

où $P_0(x_0, \dots, x_n) = \|x\|^2 = x_0^2 + \dots + x_n^2$.

Dans la première partie de ce travail, nous montrons l'existence et donnons diverses propriétés des prolongements méromorphes *à tout le plan complexe* (et pas seulement à un demi-plan) de ces fonctions zêta de hauteurs. Comme application, nous obtenons à l'aide de théorèmes taubériens classiques des développements limités des fonctions de comptage

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{P}_n(\mathbb{Q})}(B) &= \#\big\{M \in \mathbb{P}_n(\mathbb{Q}) \mid H(M) \leq B\big\}, \\ N_{V_n(\mathbb{Q})}(B) &= \#\big\{M \in V_n(\mathbb{Q}) \mid H(M) \leq B\big\} \end{aligned}$$

où H est une des hauteurs définies ci-dessus. En particulier, on retrouve les déveoppements connus (voir [15], [16], [13]) dans les deux cas classiques $H = H_\infty$ et $H = H_2$.

(1) Cela ne définit une hauteur sur l'espace projectif au sens classique que si le polynôme est homogène. Il s'agit donc d'une extension de terminologie

1.2.2. Cas du plan projectif éclaté en un point. — Soit X le plan projectif éclaté en un point P_0. On choisit les coordonnées de manière que

$$P_0 = (0:0:1),$$
$$X(\mathbb{Q}) = \big\{((x:y:z),(u:v)) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{Q}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{Q}) \mid xv - yu = 0\big\}.$$

On note :

- $\pi : X \to \mathbb{P}_2$ la projection canonique,
- $E = \pi^{-1}(P_0)$ le diviseur exceptionnel,
- $\Lambda = \pi^{-1}(D)$ où D est une droite projective quelconque de $\mathbb{P}_2$ ne contenant pas P_0.

On pose $U = X \setminus E$; donc U est un ouvert Zariski dense de X. Avec ces notations le groupe de Picard de X est donné par $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\Lambda \oplus \mathbb{Z}E$ et le cône effectif $C_{\mathrm{eff}}(X) \subset \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est donné par $C_{\mathrm{eff}}(X) = \mathbb{R}_+(\Lambda - E) \oplus \mathbb{R}_+ E$.

Soit $L_{a,b} = a\Lambda + b(\Lambda - E) \in \mathring{C}_{\mathrm{eff}}(X)$, *i.e.* a et b sont deux entiers relatifs vérifiant $a > 0$ et $a + b > 0$. Pour tout $i = \infty, 2$ et avec les notations de la relation (1), la hauteur définie par

$$H^i_{a,b}\big((x:y:z),(u:v)\big) = \big(H^2_i\big((x:y:z)\big)\big)^a \big(H^1_i\big((u:v)\big)\big)^b$$

correspond à une métrique adélique associée à $L_{a,b}$.

Le faisceau anticanonique $w_X^{-1} = 3\Lambda - E$ correspond à la hauteur $H^i_{2,1}$ et dans ce cas la conjecture de Manin prédit que

$$a(L) = 1 \quad \text{et} \quad b(L) = \text{rang}\ \mathrm{Pic}(V) - 1,$$

résultat que nous reprouvons dans cet article.

1.2.3. Notations et définition

1) Dans toute la suite les symboles

$$f(\lambda, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \ll_{\boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{x}) \quad \text{uniformément en } \boldsymbol{x} \in X \text{ et } \lambda \in \Lambda,$$

$$f(\lambda, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \mathcal{O}_{\boldsymbol{y}}\big(g(\boldsymbol{x})\big) \quad \text{uniformément en } \boldsymbol{x} \in X \text{ et } \lambda \in \Lambda$$

ont le même sens et signifient qu'il existe $A = A(\boldsymbol{y}) > 0$, ne dépendant ni de $\boldsymbol{x}$ ni de λ, mais pouvant *a priori* dépendre des autres paramètres en particulier de $\boldsymbol{y}$, tels qu'on ait $|f(\lambda, \boldsymbol{y}, \mathbf{x})| \leq Ag(\boldsymbol{x})$, pour tout $\boldsymbol{x} \in X$ et tout $\lambda \in \Lambda$. Quand il n'y a pas d'ambiguité, on omettra le mot uniformément dans ce qui précède.

2) Le symbole $f \asymp g$ signifie qu'on a à la fois $f \ll g$ et $g \ll f$.

3) On pose $n(x,y) := x/\mathrm{pgcd}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}$.

4) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

5) On note $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

6) On pose $\binom{s}{k} = s(s-1)\cdots(s-k+1)/k!$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

7) On note $s = \sigma + i\tau$ où $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ et $\tau = \mathrm{Im}(s)$ pour $s \in \mathbb{C}$.