Bull. Soc. math. France
133 (3), 2005, p. 363–394

DISTRIBUTION DES PRÉIMAGES ET DES POINTS PÉRIODIQUES D'UNE CORRESPONDANCE POLYNOMIALE

PAR TIEN-CUONG DINH

À Madame Lê Hông Sâm

RÉSUMÉ. — Nous construisons pour toute correspondance polynomiale F d'exposant de Lojasiewicz $\ell > 1$ une mesure d'équilibre μ. Nous montrons que μ est approximable par les préimages d'un point générique et que les points périodiques répulsifs sont équidistribués sur le support de μ. En utilisant ces résultats, nous donnons une caractérisation des ensembles d'unicité pour les polynômes.

ABSTRACT (*Distribution of preimages and periodic points of a polynomial correspondence*)

We construct an equilibrium measure μ for a polynomial correspondence F of Lojasiewicz exponent $\ell > 1$. We then show that μ can be built as the distribution of preimages of a generic point and that the repelling periodic points are equidistributed on the support of μ. Using these results, we will give a characterization of infinite uniqueness sets for polynomials.

1. Introduction

Un compact K de $\mathbb{C}$ est un *ensemble d'unicité* si pour tout couple de polynômes non constants f et g, la relation $f^{-1}(K) = g^{-1}(K)$ implique $f = g$. Ostrovskii, Pakovitch et Zaidenberg [29] ont montré que si f et g sont deux

Texte reçu le 25 mai 2003, accepté le 3 février 2004

TIEN-CUONG DINH, Université Paris-Sud, Mathématique, Bât. 425, 91405 Orsay (France)
E-mail : `TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 37F, 32H, 32H30, 32H50.

Mots clefs. — Correspondance, mesure d'équilibre, ensemble exceptionnel, point périodique, ensemble d'unicité.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2005/363/$ 5.00

polynômes de même degré vérifiant $f^{-1}(K) = g^{-1}(K)$ pour un compact K de cardinal au moins deux, alors il existe une rotation R préservant K telle que $f = R \circ g$. Nous avons déterminé dans [9] les polynômes f, g et les compacts K de capacité logarithmique positive vérifiant $f^{-1}(K) = g^{-1}(K)$. Des problèmes analogues pour les fonctions entières ou méromorphes ont été étudiés par Nevanlinna [28], Gross-Yang [21], Shiffman [33], *etc.* Ces auteurs utilisent des méthodes variées.

Ici, à partir de la relation $f^{-1}(K) = g^{-1}(K)$, on déduit que $g \circ f^{-1}(K) = K$ et par conséquent

$$(g \circ f^{-1}) \circ \cdots \circ (g \circ f^{-1})(K) = K,$$

ce qui permet de se ramener à l'étude dynamique de la fonction multivaluée $F := f \circ g^{-1}$ qui est en fait une correspondance polynomiale. Les propriétés dynamiques que nous allons étudier permettent de caractériser les ensembles d'unicité infinis (voir le corollaire 5.2).

Clozel et Ullmo étudient dans [7], [6] les correspondances holomorphes sur les surfaces de Riemann et sur les domaines symétriques. Ils en donnent des applications en arithmétique. Ils montrent que les correspondances modulaires sur une courbe holomorphe hyperbolique sont celles qui préservent la forme volume Ω associée à la métrique de Kobayashi. Ils en déduisent que les correspondances, qui commutent avec une correspondance modulaire extérieure, sont modulaires car ces correspondances, elles aussi, doivent préserver Ω.

Depuis les travaux de Julia [24], Fatou [17], Ritt [31], Eremenko [16] (voir aussi [11]), on sait que si deux endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ commutent, les objets dynamiques, qui leur sont associés, sont fortement liés. L'étude de ces objets permet de déterminer ou de caractériser ces endomorphismes. Dans le cadre des correspondances holomorphes, une étude dynamique devrait permettre de comprendre les commutateurs (voir le corollaire 2.9).

Nous renvoyons le lecteur à [2], [18], [19], [32], [34], pour les aspects fondamentaux de la théorie d'itération des applications holomorphes et méromorphes de $\mathbb{P}^k$. Pour les endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$ ou pour les automorphismes de Hénon de $\mathbb{C}^2$ par exemple, on sait construire des mesures invariantes, mélangeantes qui maximisent l'entropie. Ces mesures d'équilibre sont obtenues comme intersections de courants invariants positifs fermés de bidegré $(1, 1)$.

Briend-Duval [3], [4] ont montré que la mesure d'équilibre de tout endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$ de $\mathbb{P}^k$ est limite de masses de Dirac portées par les points périodiques répulsifs. C'est aussi la limite de masses de Dirac portées par les préimages de tout point z n'appartenant pas à un ensemble exceptionnel algébrique $\mathcal{E}$. Antérieurement, Fornæss-Sibony [19] avaient montré que $\mathcal{E}$ est pluripolaire. En dimension 1, ces résultats ont été démontrés par Brolin pour les polynômes [5], Lyubich [26] et Freire-Lopès-Mañé [20] pour les fractions rationnelles. Notons ici que l'étude des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$, peut se ramener à l'étude des endomorphismes polynomiaux. Il suffit de considérer le relevé de ces applications à $\mathbb{C}^{k+1}$. Dans [13], l'auteur et Sibony ont construit pour les applications d'allure polynomiale une mesure invariante d'entropie maximale et généralisé les théorèmes de Briend-Duval pour de grandes familles de telles applications (en particulier pour les applications de degré topologique plus grand qu'un certain degré dynamique et pour les applications polynomiales dont l'exposant de Lojasiewicz est supérieur à 1).

Dans le présent travail, nous allons généraliser ces résultats aux correspondances polynomiales. Notre article s'organise de la manière suivante. Au paragraphe 2 nous définissons les correspondances polynomiales sur $\mathbb{C}^k$ et leurs exposants de Lojasiewicz à l'infini. Nous construisons la mesure d'équilibre μ associée à une correspondance polynomiale F d'exposant de Lojasiewicz $\ell > 1$. Cette mesure est F^*-invariante, « mélangeante » à vitesse exponentielle et ne charge pas les ensembles pluripolaires. Nous montrons aussi que toute correspondance polynomiale, qui commute avec F, préserve la mesure d'équilibre μ de F (voir le corollaire 2.9). La construction de μ suit une méthode donnée dans [13] (*méthode par résolution de* $\mathrm{dd^c}$) ; elle est aussi valable pour les correspondances *d'allure polynomiale* ou pour les itérations aléatoires (voir aussi [12]). Pour certaines correspondances, on peut construire un courant invariant T positif fermé de bidegré $(1,1)$. Mais il est peu probable que la mesure T^k (même lorsqu'elle est bien définie) soit invariante quand $k \geq 2$.

Dans le troisième paragraphe, en adaptant une méthode géométrique développée par Lyubich [26] et Briend-Duval [3], [4] Sibony et l'auteur [13], [10]), nous construisons, pour les petites boules centrées en un point générique, beaucoup de branches inverses dont on contrôle la taille. La mesure μ reflète la distribution des préimages de tout point z qui n'appartient pas à un ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$. En collaboration avec Charles Favre, nous montrons que $\mathcal{E}$ est l'orbite positive de $\mathcal{E}_0$ où $\mathcal{E}_0$ est le plus grand sous-ensemble algébrique propre de $\mathbb{C}^k$ invariant par F^{-1}. Le cas des applications polynomiales d'exposant de Lojasiewicz $\ell > 1$ est traité dans [13], [14] (voir aussi [22], [12]). On obtient alors que l'ensemble $\mathcal{E}$ est *algébrique*. Dans ces cas la méthode algébrique s'applique sans difficulté. Pour les correspondances, nous rencontrons plusieurs difficultés techniques.

Dans le quatrième paragraphe, nous montrons en particulier que les points périodiques réguliers répulsifs de F sont denses et équidistribués sur le support de μ.

Les résultats obtenus sont encore valables dans un cadre plus général. Afin de simplifier les notations, nous préférons nous limiter au cas de l'espace complexe $\mathbb{C}^k$. Dans [12], [10], nous étendons cette étude aux itérations aléatoires des correspondances sur les variétés kählériennes compactes.

Une interprétation géométrique des résultats obtenus est donnée à la fin du paragraphe 4 (voir les corollaires 4.7, 4.8). Cette vision géométrique nous semble intéressante même pour les endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$ et les automorphismes de Hénon de $\mathbb{C}^2$. Dans le dernier paragraphe, nous appliquons les résultats obtenus pour déterminer les ensembles d'unicité infinis, pour les polynômes d'une variable.

Signalons un travail récent de Claire Voisin [36] dans lequel elle étudie la non-hyperbolicité de variétés projectives en utilisant des correspondances (voir aussi l'exemple 3.11). Du point de vue dynamique, les correspondances considérées par Clozel-Ullmo et Claire Voisin sont plus proches des automorphismes holomorphes tandis que celles étudiées dans le présent article sont plutôt proches des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$. Un outil que nous avons développé récemment avec Sibony [15] permet d'étudier les correspondances de type automorphisme.

Dans la suite, $\mathrm{B}(z,r)$ et $\overline{\mathrm{B}}(z,r)$ désignent la boule ouverte et la boule fermée de centre z et de rayon r. Les disques, les boules et le diamètre diam(.) d'un ensemble sont définis ou mesurés en métrique euclidienne. L'aire aire(.) d'un disque, la masse $\|.\|$ d'un courant, les normes L^2 et $\mathcal{C}^2$ d'une fonction sont mesurés en métrique de Fubini-Study. La notation δ_z désigne la masse de Dirac en z et $\mathbf{1}_S$ désigne la fonction indicatrice de S. Les préimages d'un point z de F sont aussi les images de z par la correspondance $\overline{F}$ adjointe à F. Nous préférons parler de préimages plutôt que d'images afin que les applications polynomiales soient couvertes par notre étude.

Remerciements. — Je remercie Charles Favre et Nessim Sibony dont les nombreuses remarques ont permis d'améliorer la rédaction de cet article.

2. Correspondances polynomiales

Soit X une variété complexe de dimension $k \geq 1$. Notons π_1, π_2 les projections canoniques de $X \times X$ dans X. On appelle *k-chaîne holomorphe* de $X \times X$ toute combinaison finie $Y := \sum n_i Y_i$ où les Y_i sont des sous-ensembles analytiques irréductibles de dimension k, deux à deux distincts, de $X \times X$ et où les n_i sont des entiers relatifs non nuls. On dira que Y est *positive* si les n_i sont positifs. D'après un théorème de Lelong, une k-chaîne holomorphe positive Y définit par intégration un courant positif fermé $[Y]$ de bidimension (k,k) de $X \times X$. Notons $|Y| := \bigcup Y_i$ le support de Y et $\overline{Y} := \sum n_i \overline{Y}_i$ où $\overline{Y}_i$ est le symétrique de Y_i par rapport à la diagonale de $X \times X$, *i.e.* l'image de Y_i par l'application $(x,y) \mapsto (y,x)$.

Une *correspondance holomorphe* de degré topologique (d_1,d_2) sur X est la donnée d'une k-chaîne holomorphe positive Y de dimension k de $X \times X$ telle que la restriction de π_i à Y définisse une application propre de degré d_i pour $i = 1,2$. Plus précisément, pour tout $z \in X$ la fibre $Y \cap \pi_i^{-1}(z)$ contient exactement d_i points comptés avec multiplicités. Il est clair que si $(x,y) \in |Y|$ et si x tend vers l'infini alors y tend aussi vers l'infini et réciproquement. On peut identifier cette correspondance à la fonction multivaluée $F := (\pi_{2|Y}) \circ (\pi_{1|Y})^{-1}$. Le terme *correspondance* désignera F. On dira que Y est le *graphe* de F. On utilisera souvent la décomposition $Y = \sum Y_i^*$ dans laquelle chaque Y_i est répété n_i fois afin d'éviter de parler de multiplicités. La correspondance $\overline{F}$ associée à $\overline{Y}$ est appelée *correspondance adjointe* de F.

Soit F' une autre correspondance de degré topologique (d_1', d_2') associée à une k-chaîne holomorphe positive $Z = \sum Z_j^*$. La composition $F' \circ F$ est celle associée au produit fibré $Y \times_X Z := \sum (Y_i^* \times_X Z_j^*)$ où

$$Y_i^* \times_X Z_j^* := \big\{(x,z) \in X \times X \text{ tel qu'il existe } y \in X \text{ vérifiant } (x,y) \in Y_i^* \text{ et } (y,z) \in Z_j^*\big\}.$$

Le produit $Y_i^* \times_X Z_j^*$ est, en général, une k-chaîne holomorphe qui n'est pas toujours irréductible. Dans la formule précédente le nombre des valeurs convenables de y détermine les multiplicités. La composition $F' \circ F$ est une correspondance de degré topologique $(d_1 d_1', d_2 d_2')$. On notera F^n la correspondance $F \circ \cdots \circ F$ (n fois).

Dans le présent travail, nous considérons le cas où X est l'espace euclidien $\mathbb{C}^k$ et les composantes Y_i de Y sont des sous-ensembles algébriques de $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k$. On dira qu'une telle correspondance F est *polynomiale (propre)*. Il existe une constante $\ell > 0$ telle que pour tout $(x,y) \in |Y|$ suffisamment grand on ait $|y| \geq c|x|^\ell$ où $c > 0$ est une constante. Si F est un endomorphisme polynomial, Ploski [30] a montré qu'il existe une constante maximale $\ell > 0$ qui vérifie la propriété ci-dessus. Sa preuve est aussi valable pour les correspondances polynomiales. Cette constante ℓ est appelée *exposant de Lojasiewicz* de F. Dans la suite, on suppose que $\ell > 1$. On vérifie que dans ce cas d_1 est strictement plus petit que d_2 (on peut prouver ceci en utilisant l'argument donné dans la proposition 4.1). Notons z les coordonnées euclidiennes de $\mathbb{C}^k$ et

$$\omega := \frac{1}{2}\mathrm{dd^c} \log\big(1 + \|z\|^2\big)$$

la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^k$. Soit $A_0 > 1$ une constante assez grande que nous allons choisir dans le lemme 2.5. Fixons un nombre $R_0 > 0$ assez grand tel que $|y| > A_0|x|$ pour tout $(x,y) \in |Y|$ vérifiant $|y| \geq R_0$. On pose

$$F^{-1} := (\pi_{1|Y}) \circ (\pi_{2|Y})^{-1},$$
$$F^* := (\pi_{1|Y})_* (\pi_{2|Y})^*, \quad F_* := (\overline{F})^* = (\pi_{2|Y})_* (\pi_{1|Y})^*.$$

Les « applications » F et F^{-1} agissent sur les sous-ensembles de $\mathbb{C}^k$, les points de la fibre $F^{-1}(z)$ de F sont comptés avec multiplicités. L'opérateur F_* agit sur les fonctions continues ou plurisousharmoniques (p.s.h.) et sur les courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ de $\mathbb{C}^k$. L'opérateur F^* agit sur les mesures positives. Plus précisément, si φ est une fonction continue ou p.s.h. sur $\mathbb{C}^k$, on pose

$$F_*\varphi := \sum_{w \in F^{-1}(z)} \varphi(w).$$