Bull. Soc. math. France
133 (3), 2005, p. 395–417

VITESSE DANS LE THÉORÈME LIMITE CENTRAL POUR CERTAINS SYSTÈMES DYNAMIQUES QUASI-HYPERBOLIQUES

PAR STÉPHANE LE BORGNE & FRANÇOISE PÈNE

RÉSUMÉ. — Nous présentons une méthode permettant d'établir le théorème limite central avec vitesse en $n^{-1/2}$ pour certains systèmes dynamiques. Elle est basée sur une propriété de décorrélation forte qui semble assez naturelle dans le cadre des systèmes quasi-hyperboliques. Nous prouvons que cette propriété est satisfaite par les exemples des flots diagonaux sur un quotient compact de $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ et les « transformations » non uniformément hyperboliques du tore $\mathbb{T}^3$ étudiées par Shub et Wilkinson.

ABSTRACT (*Rate of convergence in the central limit theorem*). — We present a method which enables to establish the central limit theorem with rate of convergence in $n^{-1/2}$ for certain dynamical systems. It is based on a strong decorrelation property that seems to be quite natural for quasi-hyperbolic systems. We prove that this property is satisfied by the diagonal flows on a compact quotient of $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ and the non uniformly hyperbolic transformations of the torus $\mathbb{T}^3$ studied by Shub and Wilkinson.

Texte reçu le 12 juin 2003, accepté le 7 novembre 2003

STÉPHANE LE BORGNE, Université de Rennes, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France) • *E-mail :* `sleborgn@univ-rennes1.fr`
FRANÇOISE PÈNE, Université de Bretagne Occidentale, UFR Sciences et Techniques, Département de Mathématiques, 29285 Brest Cedex (France)
E-mail : `francoise.pene@univ-brest.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 37D30, 22E46, 22F30, 60F05.

Mots clefs. — Hyperbolicité partielle, quasi-hyperbolicité, théorème limite central.

Introduction

Ce travail est une contribution à l'étude des propriétés stochastiques des systèmes dynamiques déterministes. Le problème général est le suivant. On se donne :

- un système dynamique probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \nu, T)$, c'est-à-dire un espace Ω muni d'une tribu $\mathcal{F}$, une mesure de probabilité ν définie sur $\mathcal{F}$ et une transformation mesurable $T : \Omega \to \Omega$ préservant la mesure ν,
- une fonction f définie sur Ω à valeurs réelles,

et on cherche à décrire les propriétés du processus stationnaire $(f \circ T^n)$. On sait maintenant depuis longtemps que certaines propriétés d'hyperbolicité du système permettent de mettre à profit les méthodes probabilistes pour étudier le comportement asymptotique du processus $(f \circ T^n)$ (cf. [12], [27], [31], [9], [4]). La décroissance des corrélations (cf. [7], [31], [3]), le théorème limite central (TLC) (cf. [30], [27], [31]), les principes d'invariance de Donsker et Strassen (cf. [4], [6], [11], [19], [23]) ont fait l'objet de nombreux articles.

Nous nous intéressons ici à la question de la vitesse de convergence dans le TLC. Établir le TLC pour une fonction f, c'est montrer l'existence d'une constante $\sigma > 0$ telle que la suite $(1/(\sigma\sqrt{n}\,) \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite N. La vitesse de convergence dans le TLC s'obtient en majorant en fonction de n la quantité

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \Big| \nu\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} f \circ T^k \leq x \Big) - \mathbf{P}(N \leq x) \Big|.$$

Lorsque le système $(\Omega, \mathcal{F}, \nu, T)$ est un système d'Anosov, on peut établir (grâce à la technique basée sur la perturbation d'opérateur développée dans [12] ou [14]) une vitesse en $n^{-\frac{1}{2}}$, donc aussi bonne que celle obtenue par Esseen [10] pour les suites de variables aléatoires indépendantes.

Dans le cas des suites de différences de martingales, les vitesses que l'on peut obtenir dépendent d'hypothèses de moments (cf. [2], [13]). Il semble difficile d'appliquer ces méthodes dans les cas qui nous occupent ici. D'abord l'action de la transformation sur les fonctions régulières ne fait pas apparaître directement une suite de différences de martingale : il faut compter avec un terme pertubateur de type cobord. Ensuite les résultats de [2] et [13] comportent des conditions de contrôle non-stationnaires qui sont évidemment violées dans les cas qui nous intéressent. Par exemple, la vitesse en $n^{-\frac{1}{2}}$ prouvée dans [2] l'est sous une hypothèse portant sur les cubes des variables qui n'est généralement pas satisfaite dans notre cadre.

En toute généralité, la décroissance exponentielle des corrélations n'entraîne pas le théorème limite central. Dans cet article nous nous proposons de montrer que :

- si on renforce convenablement cette propriété de décorrélation, alors on peut démontrer un résultat de vitesse de convergence en $n^{-\frac{1}{2}}$ dans le TLC ;
- ce renforcement peut être facile à obtenir (à partir de la propriété de décorrélation « classique » quand on en dispose).

Depuis les travaux de Esseen, différentes méthodes ont été employées pour obtenir une vitesse dans le TLC. Nous suivrons ici la méthode développée par Rio [28] (voir aussi [17], [15], [26]) .

Notations. — Tout au long de ce travail nous noterons $\mathbf{E}_\nu[\,.\,]$ l'espérance relativement à la mesure ν :

$$\mathbf{E}_\nu[f] := \int_\Omega f\,\mathrm{d}\nu.$$

Pour toutes fonctions f, g dans $L^2(\Omega,\nu)$ à valeurs complexes, nous utiliserons les écritures suivantes :

$$\langle f, g\rangle = \mathbf{E}_\nu[fg] \quad \text{et} \quad \mathrm{Cov}_\nu(f,g) = \mathbf{E}_\nu[fg] - \mathbf{E}_\nu[f]\cdot\mathbf{E}_\nu[g].$$

Étant donnée une suite stationnaire de variables $(X_k)_{k\geq 0}$, pour tout entier naturel n, nous noterons

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

avec la convention $S_0 = 0$.

Le résultat suivant (prouvé dans [17]) résulte de la démonstration de Rio [28].

THÉORÈME 1 (voir [28]). — *Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite stationnaire de variables aléatoires réelles* bornées *centrées définies sur un même espace probabilisé telle que, pour tous entiers naturels a, b, c vérifiant $1 \leq a+b+c \leq 3$, la série suivante soit convergente :*

$$(1)\qquad \sum_{p\geq 1} p \sup_{\substack{k\geq 0\\ q\geq p,\, r\geq p}} \left\| \mathbf{E}[X_{k+p}^a X_{k+q}^b X_{k+r}^c | X_0,\ldots,X_k] - \mathbf{E}[X_{k+p}^a X_{k+q}^b X_{k+r}^c] \right\|_\infty.$$

Alors, la limite suivante existe :

$$\sigma := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \big(\mathbf{E}[{S_n}^2]\big)^{\frac{1}{2}}.$$

- *Si $\sigma = 0$, alors la suite $(S_n)_n$ est bornée dans L^2.*
- *Si $\sigma > 0$, alors la suite de variables aléatoires $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire N de loi normale centrée de variance σ^2 et il existe un nombre réel $R > 0$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \nu\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) - \mathbf{P}(N \leq x) \right| \leq \frac{R}{\sqrt{n}}.$$

En étudiant en détail la démonstration de Rio, on s'aperçoit qu'il utilise en fait la propriété suivante (qui découle de l'hypothèse (1) et peut la remplacer dans l'énoncé de son théorème) :

Il existe une suite φ_p telle que la série $\sum_{p\geq 1} p\cdot\varphi_p$ converge et telle que, pour toute fonction continue $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ et pour tous entiers $j\leq k\leq k+p\leq k+q\leq k+r$, on ait

$$\big|\mathrm{Cov}(F(S_{j-1},X_j,X_k,X_\ell),X_{\ell+p}^aX_{\ell+q}^bX_{\ell+s}^c)\big|\leq \big\|F(S_{j-1},X_j,X_k,X_\ell)\big\|_{L^1}\varphi_p.$$

On peut encore affaiblir les hypothèses et montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite stationnaire de variables aléatoires réelles* bornées *centrées définies sur un même espace probabilisé. Supposons qu'il existe trois nombres réels $C\geq 1$, $M\geq \max(1,\|X_0\|_\infty)$ et $r\geq 1$, et une suite de nombres réels $(\xi_{p,\ell})_p$ vérifiant $\sum_{p\geq 1} p\max_{\ell=0,\dots,p/r}\xi_{p,\ell}<+\infty$ tels que, pour tous entiers naturels a,b,c vérifiant $a+b+c\leq 3$, pour tous entiers j,k,ℓ,p,q,s vérifiant $1\leq j\leq k\leq \ell\leq \ell+p\leq \ell+q\leq \ell+s$, pour toute fonction différentiable $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, nous ayons*

$$\begin{aligned}&\big|\mathrm{Cov}(F(S_{j-1},X_j,X_k,X_\ell),{X_{\ell+p}}^a{X_{\ell+q}}^b{X_{\ell+s}}^c)\big|\\&\quad\leq C\cdot\xi_{p,s-p}\big(\|F(S_{j-1},X_j,X_k,X_\ell)\|_{L^1}\\&\qquad+\|\sup_{\substack{|u|,|v|\leq M\\|w|,|z|\leq M}}|DF(S_{j-1}+u,X_j+v,X_k+w,X_\ell+z)|_\infty\|_{L^1}\big),\end{aligned}$$

(*en identifiant, pour tout $(u,v,w,z)\in\mathbb{R}^4$, $DF(u,v,w,z)$ à un vecteur de $\mathbb{R}^4$ et en notant $|.|_\infty$ la norme supérieure sur $\mathbb{R}^4$*). *Alors, on a les mêmes conclusions que dans le théorème* 1.

C'est ce théorème que nous allons utiliser.

Donnons quelques exemples de suites de $(\xi_{p,\ell})_{p,\ell}$ satisfaisant la condition du théorème :

- toute suite $(\xi_{p,\ell})_{p,\ell}$ telle que $\xi_{p,\ell}=\xi_p$ avec $\sum_{p\geq 1}p\,\xi_p<+\infty$ convient (nous retrouvons ainsi le théorème de Rio) ;
- toute suite $(\xi_{p,\ell})_{p,\ell}$ de la forme $\xi_{p,\ell}=(1+\ell^\beta)\delta^p$ (avec $\beta>0$ et $\delta\in\,]0,1[$) convient ;
- remarquons même que toute suite $\xi_{p,\ell}$ de la forme $\xi_{p,\ell}=\delta^pK^\ell$ (avec $\delta\in\,]0,1[$ et $K\geq 1$) convient.

Nous ne donnons pas ici la démonstration du théorème 2 car elle est technique, longue et suit dans ses grandes lignes celle de Rio [28] (on trouvera une démonstration dans [20]). L'objet de cet article est de montrer dans deux situations concrètes comment ce théorème peut être appliqué pour obtenir une vitesse dans le TLC.

1. L'exemple des flots diagonaux

1.1. Énoncé du résultat. — Soit un entier $d \geq 2$ et Γ un réseau *cocompact* de $G := \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$. Nous considérons l'espace quotient

$$\Omega := \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})/\Gamma = \{x\Gamma\,;\ x \in G\}.$$

Cet espace a une structure de variété différentiable. La mesure de Haar μ sur G donne une mesure finie sur $\Omega = G/\Gamma$ invariante par translation à gauche que nous notons $\overline{\mu}$ et supposons normalisée ($\overline{\mu}(G/\Gamma) = 1$). Nous désignerons par $\bar{x}$ la classe à gauche modulo Γ de l'élément x de G. Soit $(T_i)_{i=1}^d$ une suite décroissante de d nombres positifs non tous égaux à 1 dont le produit vaut 1. Appelons T la matrice

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & & & \\ & T_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & T_{d-1} & \\ & & & & T_d \end{pmatrix}.$$

Le groupe à un paramètre

$$\left\{ T^t = \begin{pmatrix} T_1^t & & & & \\ & T_2^t & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & T_{d-1}^t & \\ & & & & T_d^t \end{pmatrix}\ ;\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

définit sur Ω un flot, noté encore T^t, préservant la mesure $\overline{\mu}$:

$$T^t : G/\Gamma \longrightarrow G/\Gamma, \quad \bar{x} \longmapsto T^t\bar{x}.$$

Fixons une distance riemannienne d_0 sur G invariante par translation à droite et définissons une distance d sur Ω en posant

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d_0(x, y\gamma).$$

Théorème 3. — *Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction höldérienne, $\overline{\mu}$-centrée. Alors, la limite suivante existe :*

$$\sigma := \lim_{t \to +\infty} \Big(\mathbf{E}_{\overline{\mu}} \Big[\Big(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t F \circ T^s \mathrm{d}s \Big)^2 \Big] \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

- *Si $\sigma = 0$, alors la suite de v.a. $(\int_0^t F \circ T^s \mathrm{d}s)_{t>0}$ est bornée dans L^2.*
- *Si $\sigma > 0$, alors la suite de variables aléatoires $(1/\sqrt{t} \int_0^t F \circ T^s \mathrm{d}s)_{t>0}$ converge en loi relativement à la mesure de probabilité $\overline{\mu}$ (lorsque t tend vers $+\infty$) vers une variable aléatoire N de loi normale centrée de variance σ^2 et il existe un nombre réel $R > 0$ tel que, pour tout nombre réel $t \geq 1$, on ait*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \Big| \overline{\mu}\Big(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t F \circ T^s \mathrm{d}s \leq x \Big) - \mathbf{P}(N \leq x) \Big| \leq \frac{R}{\sqrt{t}}.$$