*Bull. Soc. math. France*
**133** (4), 2005, p. 459–495

# INÉGALITÉ DE VOJTA GÉNÉRALISÉE

PAR GAËL RÉMOND

RÉSUMÉ. — La méthode que Vojta a introduite dans sa preuve de la conjecture de Mordell et que Faltings a étendue pour prouver la conjecture de Lang sur les sous-variétés de variétés abéliennes repose sur une inégalité de hauteurs obtenue par approximation diophantienne. Nous montrons qu'une telle inégalité peut s'énoncer de manière très générale en dehors du contexte des groupes algébriques. Ce faisant, nous lui conférons également plus de souplesse, ce qui conduit à des applications nouvelles même sur les variétés abéliennes.

ABSTRACT (*Generalized Vojta inequality*). — The method introduced by Vojta to give a different proof of Mordell's conjecture has been generalized by Faltings to establish Lang's conjecture on abelian varieties and then further extended by Vojta to deal with semi-abelian varieties. In each case, the heart of the proof can be summarized in an inequality of heights, obtained *via* diophantine approximation. Here, we present a generalization of this step. We show it is not necessary to work with algebraic groups for this part and phrase our theorem only in terms of sheaves on projective schemes. This allows us to introduce more parameters in the statement and offers a wider range of applications. In the semi-abelian case, we obtain a variation of Vojta's result which implies Poonen's conjecture. Even in the abelian case, our inequality leads to strengthenings of Faltings' theorem.

*Texte reçu le 10 septembre 2003, révisé le 15 octobre 2004, accepté le 18 novembre 2004.*

GAËL RÉMOND, Institut Fourier, UMR 5582, BP 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex (France) • *E-mail :* `Gael.Remond@ujf-grenoble.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G35, 11G50, 14G25.

Mots clefs. — Hauteurs, conjectures de Lang.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2005/459/$ 5.00

## 1. Introduction

**1.1. Motivation.** — Ce travail s'inscrit dans une lignée amorcée par P. Vojta [16] lorsqu'il a donné en 1990 une nouvelle preuve de la conjecture de Mordell. Nous commençons par réinterpréter sa méthode pour montrer en quoi nous nous proposons de la généraliser.

Soit donc $C$ une courbe projective lisse de genre au moins 2 sur un corps de nombres $K$. Nous considérons la jacobienne $J$ de $C$. Nous supposons pour simplifier que $C$ a un point rationnel de façon à voir $C$ comme un sous-schéma fermé de $J$. Ceci permet d'associer à un entier $a \geq 2$ le morphisme décrit par

$$\alpha_a \colon C \times C \longrightarrow J, \quad (x, y) \longmapsto ax - y$$

et il est facile de vérifier que ce morphisme est fini. Le cœur du travail de Vojta peut se voir comme une comparaison entre la hauteur d'un point de $C \times C$ et celle de son image par $\alpha_a$. Celle-ci serait banale si nous considérions $a$ comme fixé mais tout l'intérêt ici réside dans l'explicitation de la dépendance en $a$. De manière précise, nous pouvons énoncer, si $h$ est une hauteur de Néron-Tate sur $J$ :

Inégalité 1. — *Il existe des réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que*

$$h(ax - y) \geq c_1^{-1}\big(a^2 h(x) + h(y)\big)$$

*pour tout entier $a \geq c_2$ et tout couple $(x, y) \in C(K)^2$ avec $h(x) \geq c_3$ et $h(y) \geq a^2 c_3$.*

Nous nous intéresserons uniquement dans la suite à cette partie de la preuve mais rappelons brièvement comment la finitude de $C(K)$ se déduit d'un tel énoncé. Il s'agit, grâce au théorème de Mordell-Weil, de faire de la géométrie euclidienne dans $J(K) \otimes \mathbb{R}$. En effet, en choisissant $a^2$ proche de $h(y)/h(x)$, l'inégalité entraîne que $x$ et $y$ ne peuvent pas être trop proches angulairement. Cela montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de $C(K)$ de hauteur au moins $c_3$ et donc que $C(K)$ lui-même est fini.

L'inégalité ci-dessus constitue donc l'essentiel de la preuve et s'obtient *via* une construction d'approximation diophantienne assez élaborée. Nous souhaitons généraliser celle-ci et, pour cela, il est commode de travailler en termes de faisceaux inversibles. En effet, dans la situation ci-dessus, si $\mathcal{L}$ est un faisceau ample et symétrique sur $J$ auquel la hauteur $h$ est associée, nous disposons sur $C \times C$ de deux faisceaux $\mathcal{M}_a = \alpha_a^* \mathcal{L}$ et $\mathcal{N}_a = p_1^* \mathcal{L}^{\otimes a^2} \otimes p_2^* \mathcal{L}$, tous deux dépendant de l'entier $a$, et le résultat compare les hauteurs associées à $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{N}_a$ de manière indépendante de $a$ : nous avons $h_{\mathcal{M}_a}(x, y) \geq c_1^{-1} h_{\mathcal{N}_a}(x, y)$.

Nous percevons ici la première idée motivant notre résultat : la jacobienne $J$ intervient très peu dans cette inégalité. Elle sert certes à définir les faisceaux $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{N}_a$ mais tout se passe ensuite sur $C \times C$. Cette intuition est confirmée par la preuve et l'on peut donc chercher les hypothèses à mettre sur les faisceaux $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{N}_a$ pour remplacer les données provenant de $J$. Il faut également remarquer que le fait que nous ayons utilisé plus haut une hauteur normalisée n'est pas gênant car il suffit d'ajuster les constantes pour substituer à $h$ une autre hauteur associée à $\mathcal{L}$. Il est par suite possible de formuler l'inégalité seulement en termes de hauteurs de Weil sur $C \times C$.

D'un autre côté, nous allons bien sûr tirer parti des généralisations déjà existantes du travail de Vojta. Tout d'abord, G. Faltings a étendu la méthode au cas des sous-variétés $X$ de dimension quelconque d'une variété abélienne $A$ (voir [5] et [6]) pour obtenir les résultats conjecturés par S. Lang. L'inclusion $X \subset A$ remplace donc $C \subset J$. Ici $X(K)$ n'est pas fini en général mais, si nous introduisons l'ensemble exceptionnel $Z_X$ défini comme la réunion des translatés inclus dans $X$ de sous-variétés abéliennes non nulles de $A$, Faltings prouve que $(X \setminus Z_X)(K)$ est fini. Le morphisme

$$\begin{aligned} \beta_a \colon X^m &\longrightarrow A^{m-1}, \\ x = (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto (a_1x_1 - a_2x_2, \ldots, a_{m-1}x_{m-1} - a_mx_m) \end{aligned}$$

associé à $a \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ où $m = \dim X + 1$ généralise $\alpha_a$ assez naturellement. Il n'est pas fini mais — dès que la situation n'est pas dégénérée, c'est-à-dire dès que $Z_X \neq X$ — il est encore génériquement fini. De la même façon, l'étape principale de la preuve devient (voir [6] ou [9]) :

Inégalité 2. — *Il existe des réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que*

$$\sum_{i=1}^{m-1} h(a_ix_i - a_{i+1}x_{i+1}) \geq c_1^{-1} \sum_{i=1}^{m} a_i^2 h(x_i)$$

*pour tous les $a \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ et $x \in (X \setminus Z_X)(K)^m$ qui vérifient $a_i/a_{i+1} \geq c_2$ et $a_i^2 h(x_i) \geq a_1^2 c_3$.*

En termes de faisceaux, l'analogie se poursuit : sur $X^m$, nous comparons les hauteurs associées à

$$\mathcal{M}_a = \beta_a^* \bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^*\mathcal{L} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_a = \bigotimes_{i=1}^{m} p_i^*\mathcal{L}^{\otimes a_i^2}$$

si $\mathcal{L}$ est symétrique et ample sur $A$. Nous pouvons donc envisager une comparaison de hauteurs sur $X^m$, pour un schéma projectif $X$ quelconque et un entier $m \geq 2$, entre deux faisceaux vérifiant des conditions *ad hoc*, toute structure de groupe algébrique ayant disparu. Le travail de Faltings nous montre aussi quelle sera la forme de l'hypothèse principale sur ces faisceaux : il établit en effet que pour tout sous-produit $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$ de $X^m$ qui rencontre $(X \setminus Z_X)^m$ il y a une minoration de la forme

$$[\mathcal{M}_a]^{\dim Y} \cdot Y \geq \theta^{-1} [\mathcal{N}_a]^{\dim Y} \cdot Y$$

pour un réel $\theta$ indépendant de $a$ et de $Y$. C'est de cette manière qu'est utilisé le fait que $\beta_a$ soit génériquement fini.

Enfin, nous nous inspirons du travail de P. Vojta [17] en 1996 sur les variétés semi-abéliennes. Il a adapté la méthode à ce cas et ceci permit à M. McQuillan de résoudre complètement la conjecture de Lang dans ce cadre. La difficulté principale, à savoir que les schémas en question ne sont pas propres, se résout en travaillant sur un éclatement de $X^m$. Nous procédons donc ici de la même façon que dans [12] où nous avons établi une inégalité de Vojta pour les tores.

Nous renvoyons à [17] ou [13] (où le résultat est déduit du théorème démontré ici) pour des détails sur le cas semi-abélien. Écrivons simplement l'inégalité pour illustrer notre propos ; il faut décomposer la hauteur en $h = h_{\mathrm{lin}} + h_{\mathrm{quad}}$ (parties linéaire et quadratique correspondant aux comportements torique et abélien, respectivement) et nous avons

$$\sum_{i=1}^{m-1} h_{\mathrm{lin}}(a_i^2 x_i - a_{i+1}^2 x_{i+1}) + h_{\mathrm{quad}}(a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1}) \geq c_1^{-1} \sum_{i=1}^{m} a_i^2 h(x_i)$$

avec des hypothèses analogues à celles du cas abélien (voir [13]).

L'énoncé que nous proposons ci-dessous (voir théorème 1.2) reprend donc les ingrédients que nous venons de présenter. Sur un éclatement de la puissance $X^m$ d'un schéma projectif sont introduits deux faisceaux $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{N}_a$ dépendant d'un élément $a \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$. Ils vérifient deux hypothèses : celle que nous choisissons de considérer comme secondaire concerne essentiellement la hauteur de sections de $\mathcal{M}_a$ et remplace l'existence de formules d'addition dans le cadre des groupes algébriques ; la principale est une minoration du nombre d'auto-intersection de $\mathcal{M}_a$ sur les éclatés de certains sous-produits de $X^m$. La conclusion donne alors une comparaison, indépendante de $a$, entre les hauteurs induites par $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{N}_a$. Signalons que, plus bas, le faisceau $\mathcal{M}_a$ sera en fait noté seulement $\mathcal{M}$ car, au contraire de $\mathcal{N}_a$, il ne sera pas entièrement déterminé par $a$ mais pourra être choisi de manière plus souple.

Remarquons que nous avons cité les applications aux points rationnels mais que le théorème 1.2 lui-même concerne tout $\overline{\mathbb{Q}}$ et que les corps de définition des différents objets n'apparaissent jamais. Par ailleurs, l'énoncé améliore légèrement les inégalités 1 et 2 puisque l'hypothèse $a_i^2 h(x_i) \geq a_1^2 c_3$ devient seulement $h(x_i) \geq c_3$. Enfin, signalons encore que le résultat est effectif, au sens où il fournit des valeurs explicites pour $c_1$, $c_2$ et $c_3$.

Comme motivation pour un tel résultat général, nous mentionnons deux applications. D'une part, dans le cas semi-abélien, l'inégalité obtenue est employée dans [13] pour montrer la conjecture Mordell-Lang plus Bogomolov de B. Poonen. Rappelons que celle-ci, formulée dans [8], est démontrée dans le cas des variétés abéliennes à la fois par B. Poonen dans ce même article et, indépendamment, par S. Zhang dans [18]. Leur méthode permet également de traiter les variétés semi-abéliennes qui sont isogènes au produit d'un tore par une variété abélienne mais ne s'étend pas au cas général. Notre approche dans [13] diffère en ce qu'elle n'utilise pas d'arguments d'équidistribution.

Même dans le cas des variétés abéliennes, la latitude sur $a$ et $\mathcal{M}_a$ permet d'aller au-delà de la conjecture de Lang et d'envisager des énoncés plus uniformes. À titre d'exemple et pour rester dans le cadre des points rationnels, le résultat principal de [15], obtenu grâce au théorème 1.2 ci-dessous, entraîne l'énoncé suivant.

Proposition 1.1. — *Soient $K$ un corps de nombres, $E$ une courbe elliptique sur $K$ à multiplication complexe et $C$ une courbe projective lisse sur $K$ plongée dans sa jacobienne $J$. Alors, l'ensemble des points $P \in C(\overline{K})$ tels qu'il existe un morphisme surjectif $\varphi\colon J \to E^2$ avec $\varphi(P)$ rationnel sur $K$ est fini.*

Dans ce cas, la souplesse de l'énoncé de l'inégalité permet de l'employer pour minorer une hauteur de la forme $h(\varphi(ax-y))$ sur $C \times C$ et de préciser la dépendance en $\varphi$.

**1.2. Notations.** — Nous définissons la hauteur de Weil (logarithmique et absolue) d'une partie finie $F \subset \overline{\mathbb{Q}}$ comme

$$h(F) = \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |F|_v$$

où $K$ désigne le corps de nombres $\mathbb{Q}(F)$ et $|F|_v = \max_{x\in F} |x|_v$ pour toute place $v$ de $K$. Nous étendons les notations $|P|_v$ et $h(P)$ à un polynôme $P$ en l'identifiant à la famille de ses coefficients. De même la hauteur $h(y)$ d'un point fermé $y$ de $\mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est celle d'un système quelconque de coordonnées de $y$.

Cette hauteur des points est la notion cruciale dans l'énoncé ci-après mais nous utiliserons aussi celle de hauteur projective d'un sous-schéma fermé $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{Q}}}$ notée $h(X)$ (voir [3] ou [10]). Il faut signaler que, pour un point fermé $x$, la hauteur $h(\{x\})$ ainsi introduite diffère de la précédente $h(x)$ (elle correspond à un choix de normes euclidiennes à l'infini) mais nous avons toujours $h(x) \leq h(\{x\})$.

Enfin, si $a \in \mathbb{N}^m$ pour un entier $m \geq 1$, nous notons systématiquement $a = (a_1, \ldots, a_m)$ et utilisons également $|a| = a_1 + \cdots + a_m$.

**1.3. Énoncé principal.** — Soient $X$ un schéma projectif sur $\overline{\mathbb{Q}}$, intègre et de dimension non nulle, $\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\overline{\mathbb{Q}}}$ une immersion fermée et $\mathcal{L} = \iota^*\mathcal{O}(1)$. Nous utiliserons le degré de $X$ dans ce plongement (égal au nombre d'intersection $[\mathcal{L}]^{\dim X}\cdot X$) et sa hauteur $h(X)$.