Bull. Soc. math. France
133 (4), 2005, p. 497–539

COMPACTIFICATIONS DES ESPACES DE CONFIGURATION DANS LES SCHÉMAS DE HILBERT

PAR LAURENT EVAIN

RÉSUMÉ. — Soient $F(X,n) = X^n - \Delta$ le complémentaire de l'union Δ des diagonales dans X^n et U un quotient (éventuellement trivial) de $F(X,n)$ par un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Ce travail présente des procédés de compactification de U dans des produits de schémas de Hilbert. Notre démarche généralise et unifie des constructions classiques dues à Schubert-Semple, Le Barz-Keel, Kleiman et Cheah. Une étude géométrique plus détaillée est faite pour les cas $n \leq 3$. Cette étude inclut notamment une classification complète, la détermination des compactifications lisses, et la description des morphismes quotients par les actions naturelles.

ABSTRACT (*Compactifications of configuration spaces inside Hilbert Schemes*)
Let $F(X,n) = X^n - \Delta$ be the complement of the union Δ of the diagonals in X^n, and let U be a quotient (possibly trivial) of $F(X,n)$ by a subgroup of the symmetric group $\mathfrak{S}_n$. In this work, methods to compactify U inside products of Hilbert Schemes are introduced. Our approach generalizes and unifies previous classical constructions by Schubert-Semple, Le Barz-Keel, Kleiman and Cheah. A more detailed geometrical study is done when $n \leq 3$. This includes in particular a complete classification, the determination of the smooth models and a description of the quotient morphisms with respect to the natural actions.

Texte reçu le 25 septembre 2003, accepté le 13 janvier 2004.

LAURENT EVAIN, Université d'Angers, Faculté des sciences, Département de mathématiques, 2, Bd. Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01 (France) • *E-mail :* laurent.evain@univ-angers.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14C05.

Mots clefs. — Compactification, espace de configuration, schéma de Hilbert.

1. Introduction

1.1. Quelques compactifications classiques et leurs applications

Soit $F(X,n) = X^n - \Delta$ le complémentaire de l'union Δ des diagonales dans X^n. L'histoire des compactifications des espaces de configuration $F(X,n)$ est ancienne. Elle trouve son origine au siècle passé dans des problèmes de géométrie énumérative. Au fil des années, et jusque très récemment, de nouvelles constructions sont apparues au gré des besoins. Illustrons ces nombreuses constructions en présentant les plus classiques.

Schubert [15] utilise dès 1880 une compactification de la variété des triangles ($X = \mathbb{P}^2$ et $n = 3$) pour résoudre des problèmes énumératifs. Son travail est modernisé par Semple [16]. S'appuyant sur le travail de Semple, Tyrrell [17], Roberts et Speiser [14] démontrent rigoureusement certaines formules de Schubert. Collino et Fulton [2] calculent complètement l'anneau d'intersection de cette compactification et retrouvent également les résultats de Schubert. Le Barz étend la construction de Schubert-Semple à toute variété lisse par l'utilisation de schémas de Hilbert [12] et Keel l'étend à tout schéma par une approche fonctorielle [10].

Kleiman [11] construit une compactification de $F(X,n)$ par récurrence sur n en utilisant des points infiniment voisins. Cette approche lui permet d'obtenir des formules décrivant le lieu multiple d'un morphisme. Dolgachev et Ortland [4] en déduisent d'autres constructions en liaison avec les fonctions theta.

La compactification de Fulton-MacPherson [8] admet plusieurs définitions, soit fonctorielle, soit géométrique, l'une d'entre elles étant un éclatement subtil de X^n. Quand X est compact, elle permet le calcul du type d'homotopie rationnel des espaces de configuration en fonction des invariants de X.

Citons enfin le travail de Cheah [1] qui a étudié une classe de compactifications similaires dans l'esprit à celle de LeBarz, se projetant sur le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n(X)$.

1.2. Le problème. — Expliquons plus en détail l'approche de Le Barz, qui est le point de départ de notre travail. Étant donnés trois points distincts p_1, p_2, p_3 de X, on peut former les trois doublets

$$p_{12} = p_1 \cup p_2,\ p_{13} = p_1 \cup p_3,\ p_{23} = p_2 \cup p_3 \in \mathrm{Hilb}^2(X)$$

et le triplet $p_{123} = p_1 \cup p_2 \cup p_3 \in \mathrm{Hilb}^3(X)$. Cette construction se reformule en disant que $F(X,3)$ est isomorphe à un sous-schéma localement fermé

$$Z(X) \subset X^3 \times \mathrm{Hilb}^2(X)^3 \times \mathrm{Hilb}^3(X).$$

L'adhérence $\overline{Z(X)}$ est donc une compactification de $F(X,3)$ dans un produit de schémas de Hilbert. Le Barz a montré que cette adhérence, *a priori* difficilement manipulable, peut en fait être décrite géométriquement en termes de lieux d'incidence : les points de l'adhérence sont les 7-uplets $(p_1, p_2, \ldots, p_{123})$ satisfaisant les relations évidentes

$$p_1 \subset p_{12} \subset p_{123}, \quad p_3 \text{ est le résiduel de } p_{12} \text{ dans } p_{123}$$

et les relations s'en déduisant par symétrie. Keel a remarqué que cette description par adhérence pouvait être exploitée pour donner une définition de $\overline{Z(X)}$ comme représentant d'un certain foncteur et en déduire quelques conséquences géométriques. On obtient donc finalement une compactification agréable à manipuler car elle jouit d'une triple définition, par adhérence, par incidence, et fonctorielle. Cette multiplicité des points de vue est très semblable à l'approche de [8].

Il est des contextes où le besoin d'une généralisation des idées de Le Barz se fait sentir. Par exemple, comme l'avait fait remarquer Fulton, la transposition directe des idées utilisées par Le Barz pour construire la variété de triplets ne permet pas de construire une variété de quadruplets (*cf.* [3, §0.7]). Ou encore, l'étude des collisions de gros points sur une surface nécessite la construction de variétés de triplets complets « à la Le Barz », se projetant sur le schéma de Hilbert, mais symétriques [6].

Dans la frontière de la compactification construite par Le Barz, toutes les informations sur la collision des points p_1, p_2, p_3 se trouvant dans les schémas de Hilbert n'ont visiblement pas été exploitées. Par exemple, les deux doublets p_{12} et p_{13} de $\mathrm{Hilb}^2(X)$ distincts définissent un point p^1 de $\mathrm{Hilb}^2(\mathrm{Hilb}^2(X))$. Utilisant les points p^1, p^2, p^3, on peut construire par adhérence une compactification de $F(X,3)$ dans un produit plus gros contenant des facteurs de la forme $\mathrm{Hilb}^2(\mathrm{Hilb}^2(X))$. Réitérant le processus, on peut construire des compactifications dans des espaces produits $P_1 \times \cdots \times P_n$, chacun des termes P_i du produit étant un schéma de Hilbert emboîté $\mathrm{Hilb}^{p_\ell}(\mathrm{Hilb}^{p_{\ell-1}}(\cdots \mathrm{Hilb}^{p_1}(X)))$. En variant les termes P_i, on a donc une infinité de compactifications à notre disposition.

Le travail que nous nous proposons d'effectuer ici est d'étudier et de classifier les compactifications obtenues par ce procédé.

1.3. Un aperçu de la construction générale. — Les compactifications que nous allons construire seront paramétrées par des données combinatoires. Plus précisément, les compactifications des quotients de $F(X,n)$ seront paramétrées par des sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Si la construction générale nécessite une certaine précision, elle peut néanmoins être comprise sur quelques exemples significatifs. Expliquons par exemple comment, en utilisant les points p^1 et p_{123}, construire la compactification R^1_{123} dans $\mathrm{Hilb}^2(\mathrm{Hilb}^2(X)) \times \mathrm{Hilb}^3(X)$.

Considérons les sous-ensembles $\{1,2\}$ et $\{1,3\}$ de $\{1,2,3\}$. Soit σ^1 l'ensemble contenant ces sous-ensembles, et $\sigma_{123} = \{1,2,3\}$. Le couple $\eta = (\sigma^1, \sigma_{123})$ peut être symbolisé par le dessin suivant.

$$\boxed{\begin{array}{c}\boxed{1\ 2}\\[1em]\boxed{1\ 3}\end{array}}\qquad\boxed{1\ 2\ 3}$$

On associe à la donnée combinatoire η le morphisme

$$\begin{aligned} f_\eta : F(X,3) &\longrightarrow \mathrm{Hilb}^2(\mathrm{Hilb}^2(X)) \times \mathrm{Hilb}^3(X),\\ (p_1,p_2,p_3) &\longmapsto \big(p^1 = (p_1 \cup p_2) \cup (p_1 \cup p_3),\ p_{123} = (p_1 \cup p_2 \cup p_3)\big). \end{aligned}$$

La donnée combinatoire η vérifie une relation d'incidence : chacun des ensembles de σ^1 est inclus dans σ_{123}. Cette incidence combinatoire peut se traduire au niveau géométrique. On peut définir un lieu schématique d'incidence R_η $(= R^1_{123})$ dans $\mathrm{Hilb}^2(\mathrm{Hilb}^2(X)) \times \mathrm{Hilb}^3(X)$ formé par les couples (p^1, p_{123}) pour lesquels $p^1 \subset p_{123}$. Cette inclusion signifie que le sous-schéma $[p^1] \subset \mathrm{Hilb}^2(X)$ paramétré par p^1 est inclus dans le lieu schématique $Z \subset \mathrm{Hilb}^2(X)$ paramétrant les doublets inclus (au sens usuel) dans $[p_{123}]$. Au niveau fonctoriel, puisque R_η est défini par une incidence dans un produit de schémas de Hilbert, se donner un morphisme $B \to R_\eta$ équivaut à se donner deux familles plates $F_1 \to B$ et $F_2 \to B$ dont les fibres sont soumises à une condition d'incidence. On peut montrer que l'adhérence du morphisme f_η s'identifie à l'incidence R_η.

Cet exemple se généralise. Étant donnée une donnée combinatoire η formée par une collection d'ensembles gigognes inclus les uns dans les autres et contenant les nombres $\{1,\dots,n\}$, on peut associer un morphisme $f_\eta : F(X,n) \to H_\eta$ où H_η est un produit de schémas de Hilbert emboîtés. On peut définir dans H_η un sous-schéma fermé R_η, soit comme lieu d'incidence d'incidence schématique, soit comme représentant d'un certain foncteur. Chacune des relations d'incidence définissant R_η correspond à une relation d'incidence sur la donnée combinatoire η. Par construction, l'adhérence du morphisme f_η est incluse dans R_η. En revanche, on n'a pas toujours égalité. Les compactifications qui nous intéressent sont celles pour lesquelles on a égalité, car elles se manipulent aisément via une triple définition (par adhérence, par incidence et fonctorielle). On les appellera variétés de n-uplets enrichis.

Revenant à l'exemple, on voit que la donnée combinatoire est symétrique en les indices 2 et 3. Cela s'interprète géométriquement en une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ sur R_η qui génériquement consiste à échanger les points p_2 et p_3. De même, la variété de Le Barz, associée à la structure combinatoire suivante symétrique en les nombres 1, 2 et 3, est munie d'une action du groupe

$$\boxed{1}\quad\boxed{2}\quad\boxed{3}\quad\boxed{1\ 2}\quad\boxed{1\ 3}\quad\boxed{2\ 3}\quad\boxed{1\ 2\ 3}$$

symétrique $\mathfrak{S}_3$. Mais l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur la variété de Le Barz est fidèle, tandis que l'action de $\mathfrak{S}_2$ sur R_η est triviale. Dans le cas général, la situation est intermédiaire entre ces deux exemples. Il existe un groupe G_η qui agit sur R_η et un sous-groupe H_η qui n'agit pas, de sorte que l'action du groupe quotient Q_η soit fidèle. Ici encore, Q_η ne dépend que de la structure combinatoire η.

1.4. Le contenu du travail. — Cet article s'articule en trois parties.

Une première partie dégage les structures combinatoires, les notions d'incidence et les foncteurs qui permettent de manipuler aisément les compactifications (sections 2 et 3).

On aborde ensuite le problème de la classification et de l'étude de la géométrie des compactifications ainsi définies quand $n \leq 3$ (lissité, étude des quotients, stratification) dans les sections 4, 5, 6 et 7.

On compare enfin (section 8) les compactifications obtenues aux compactifications classiques présentées au début de cette introduction.

1.5. Les résultats. — Le cas $n = 2$ étant trivial, on ne présente dans cette introduction que les résultats concernant les compactifications de $F(X, n = 3)$ et de ses quotients. On peut extraire de cette étude deux résultats surprenants. Tout d'abord, alors qu'il existe une infinité de choix possibles pour le produit dans lequel on construit la compactification de $F(X, 3)$, il n'existe *a posteriori* qu'un nombre fini de compactifications à isomorphisme près.

Théorème 1. — *À isomorphisme près de compactification, il y a onze variétés de triplets enrichis. De plus, toute compactification est isomorphe à une compactification dans $P_1 \times \cdots \times P_r$ où chaque P_i est soit de la forme* $\mathrm{Hilb}^i(X)$, *soit de la forme* $\mathrm{Hilb}^i(\mathrm{Hilb}^j(X))$.

Le deuxième fait inattendu est que les structures d'ordre supérieur (c'est-à-dire les termes de la forme $\mathrm{Hilb}^{p_\ell}(\mathrm{Hilb}^{p_{\ell-1}}(\cdots \mathrm{Hilb}^{p_1}(X)))$, avec $\ell \geq 2$) peuvent être utilisées pour décrire les passages au quotient. Par exemple, la variété construite par Le Barz dans le produit $X^3 \times \mathrm{Hilb}^2(X)^3 \times \mathrm{Hilb}^3(X)$ est naturellement munie d'une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et la structure d'ordre deux $\mathrm{Hilb}^3(\mathrm{Hilb}^2(X))$ permet une description explicite du quotient :

Théorème 2. — *Le quotient de la variété de Le Barz $\widehat{H}_3/\mathfrak{S}_3$ est isomorphe à l'adhérence de $F(X, 3)/\mathfrak{S}_3$ dans* $\mathrm{Hilb}^3(\mathrm{Hilb}^2(X)) \times \mathrm{Hilb}^3(X)$.

Cette description nous permet « d'inverser » la propriété universelle du quotient. Alors que la propriété universelle du quotient permet de définir des morphismes depuis $\widehat{H}_3/\mathfrak{S}_3$, la propriété universelle de nos constructions dans les schémas de Hilbert permet de définir des morphismes vers $\widehat{H}_3/\mathfrak{S}_3$. Ce théorème était en fait notre motivation première (voir le contexte à la fin de cette introduction). En d'autres termes, les structures de niveau supérieur s'imposent d'elles mêmes quand il s'agit d'étudier les quotients. Ce principe est illustré par